О РАССЛОЕНИИ ЦЕНТРОПРОЕКТИВНЫХ РЕПЕРОВ

АРТУР ВЛАДИМИРОВИЧ КУЛЕШОВ

1. Расслоения реперов и дифференциальные группы

Пусть X и Y — гладкие вещественные конечномерные многообразия, $x \in X$, $y \in Y$. Через $J^p_{x,y}(X, Y)$ обозначим множество всех p-струй отображений из X в Y с началом x и концом y. Если X и Y имеют одинаковую размерность, то рассматриваются также следующие многообразия: $inv J^p_{x,y}(X, Y)$ — множество всех обратимых p-струй отображений с началом x и концом y, а также $inv J^p_x(X, Y) := \bigcup_{y\in Y} inv J^p_{x,y}(X, Y)$.

Дифференциальная группа порядка p есть группа Ли $D^p_n := inv J^p_{0,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, умножение в которой определяется композицией p-струй. Стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$ порождают глобальную карту на D^p_n с координатами

$$(x^i_j(l^p),\, x^i_{jk}(l^p),\, \dots,\, x^i_{j_1\dots j_p}(l^p)), \quad l^p \in D^p_n,$$

симметричными по нижним индексам.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n ($n \in \mathbb{N}$). Репером r^p_x порядка p в точке $x \in M$ называется точка многообразия $inv J^p_{0,x}(\mathbb{R}^n, M)$. Как известно (см., напр., [1]), многообразие $H^p(M) = inv J^p_0(\mathbb{R}^n, M)$ всех p-реперов наделено структурой главного расслоения над базой M с канонической проекцией $\pi_p \colon H^p(M) \to M$, где $\pi_p(r^p_x) = x$, и правым действием дифференциальной группы D^p_n, определяемым композицией p-струй. Каждая локальная карта (U, φ) на M порождает тривиализацию $\tilde\varphi \colon r^p_x \mapsto (x, l^p)$ расслоения $H^p(M)$ и, как следствие, карту на $H^p(M)$ с локальными координатами репера r^p_x:

$$(x^i,\, x^i_k,\, x^i_{k_1k_2},\, x^i_{k_1k_2\dots k_p},\, \dots).$$

Определена ступенчатая последовательность проекций:

$$H^p(M) \overset{\pi^p_{p-1}}{\to} H^{p-1}(M) \overset{\pi^{p-1}_{p-2}}{\to} \dots \overset{\pi^3_2}{\to} H^2(M) \overset{\pi^2_1}{\to} H(M) \overset{\pi}{\to} M,$$
$$\pi^p = \pi \circ \pi^2_1 \circ \dots \circ \pi^{p-1}_{p-2} \circ \pi^p_{p-1}.$$

На расслоении $H^p(X)$ глобально определена линейная дифференциальная форма ω^p:

$$\omega^p(X_{r^p_x}) = (r^p_x)^{-1}(d\pi^p_{p-1}(X_{r^p_x}))$$

со значениями в векторном пространстве $\mathbb{R}^n \oplus \tilde D^{p-1}_n$, касательном к $H^{p-1}(\mathbb{R}^n)$ в точке $(0, \delta^{p-1})$, где $\tilde D^{p-1}_n = T_{\delta^{p-1}}(D^{p-1}_n)$ — алгебра Ли группы D^{p-1}_n, а репер r^p_x рассматривается как линейный изоморфизм $\mathbb{R}^n \oplus \tilde D^{p-1}_n \to T_{r^{p-1}_x} H^{p-1}(M)$. В базисе этого пространства форма ω^p раскладывается по линейным дифференциальным формам

$$\omega^i,\, \omega^i_j,\, \omega^i_{j_1j_2},\, \dots,\, \omega^i_{j_1j_2\dots j_{p-1}},$$

симметричным по нижним индексам, инвариантным относительно замен вышеуказанных карт на $H^p(M)$ и удовлетворяющим следующим структурным уравнениям [1, с. 48]:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk},$$
$$d\omega^i_{j_1\dots j_s} = \sum_{\alpha=1,\dots,s} C^\alpha_s \omega^k_{(j_1\dots j_\alpha} \wedge \omega^i_{j_{\alpha+1}\dots j_s)k} + \omega^k \wedge \omega^i_{j_1\dots j_s k},$$
$$(s = \overline{2,\, p-1}).$$

2. Расслоение центропроективных реперов

В [2] доказаны нижеследующие утверждения:

Утверждение 1. *Соотношения $x^i_j(l^2) = \delta^i_j$, $x^k_{jk}(l^2) = 0$ выделяют нормальный делитель K группы D^2_n, фактор-группа D^2_n/K по которому изоморфна группе центропроективных преобразований n-мерного проективного пространства.*

Координаты на D^2_n/K имеют вид $(x^i_j(l^2K), x_i(l^2K))$, где

$$x^i_j(l^2K) = x^i_j(l^2),\ x_i(l^2K) = x^m_{ik}(l^2)\tilde{x}^k_m(l^2), \quad \tilde{x}^i_k x^k_j = \delta^i_j.$$

Утверждение 2. *Многообразие $G(M) = H^2(M)/K$ орбит вида r^2_xK, где $r^2_x \in H^2(M)$, наделено структурой главного расслоения над базой M с канонической проекцией*

$$\underline{\pi}\colon r^2_xK \mapsto x$$

и структурной группой D^2_n/K, действующей по закону $(r^2_xK)(l^2K) = (r^2_x \cdot l^2)K$. Каждая локальная карта (U, φ) на M порождает тривиализацию

$$\underline{\tilde{\varphi}}\colon r^2_xK \mapsto (x, l^2K) \in U \times D^2_n/K$$

расслоения $H^2(M)/K$ и локальную карту с координатами

$$(\varphi^i(x),\ x^i_j(l^2K),\ x_i(l^2K)). \tag{1}$$

Утверждение 3. *Формы ω^i, ω^i_j, $\omega_i \overset{def}{=} \omega^k_{ik}$ инвариантны относительно замен локальных карт вида (1), причем*

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^k \wedge \omega^i_k, \\ d\omega^i_j &= \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \\ d\omega_i &= \omega^k_i \wedge \omega_k + \omega^k \wedge \omega^m_{ikm}. \end{aligned}$$

Определение 1. *Расслоение $G(M)$ называется расслоением центропроективных реперов.*

Замечание. В случае, когда $M = P_n$ — проективное пространство, элементы слоя расслоения $G(M)$ над точкой x можно интерпретировать как проективные реперы пространства P_n с первой вершиной x, а структурную группу D^2_n/K — как подгруппу стационарности точки этого пространства.

Список литературы

[1] Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.П. Широков, Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях, *Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии*, Т. 9, 5–247 (1979).

[2] А.В. Кулешов, Центропроективные реперы как классы эквивалентности реперов второго порядка, *Диф. геом. многообр. фигур*, Вып. 46, 94–107 (2015).