НОВАЯ НЕПРИВОДИМАЯ КОМПОНЕНТА ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА 2 НА $\mathbb{P}^3$

Иванов А. Н. (Москва, НИУ ВШЭ)
xnikiv@gmail.com

Пусть $\mathcal{M}(0,k,n)$ – схема модулей Гизекера-Маруямы полустабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = k,\ c_3 = n$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над основным полем $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ характеристики 0. Обозначим $\mathcal{M}(k) = \mathcal{M}(0,k,0)$. Под множеством особенностей данного $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$-пучка E мы понимаем множество $\mathrm{Sing}(E) = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid E$ не является локально свободным в точке $x\}$. $\mathrm{Sing}(E)$ является всегда собственным замкнутым подмножеством $\mathbb{P}^3$ и, более того, если E – полустабильный пучок ненулевого ранга, каждая неприводимая компонента множества $\mathrm{Sing}(E)$ имеет размерность максимум 1. Кроме того, всюду далее для стабильного пучка E мы не будем делать различия между E и его классом изоморфизма $[E]$ как точкой в пространстве модулей.

Общие точки всех известных до настоящего времени компонент схем $\mathcal{M}(k)$, $k \geq 1$, являются пучками с особенностями чистой размерности, при этом все компоненты схем $\mathcal{M}(1)$ и $\mathcal{M}(2)$ найдены [3], в отличие от схемы $\mathcal{M}(3)$, полное описание всех компонент которой является открытой проблемой. В совместной работе [4] докладчика и А. С. Тихомирова описаны 3 новые неприводимые компоненты схемы $\mathcal{M}(3)$, общие точки которых являются пучками с множеством особенностей, содержащим компоненты размерностей 0 и 1. Построенные семейства пучков является первым примерами неприводимых компонент схемы Гизекера-Маруямы, общие точки которых являются пучками с особенностями смешанной размерности. Настоящий доклад посвящен описанию одной из этих компонент.

Рассмотрим в $\mathcal{M}(0,2,2)$ открытое подмножество $\mathcal{R}$ – схему модулей стабильных рефлексивных когерентных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = 2,\ c_3 = 2$. Для любой точки $[F] \in \mathcal{R}$, по теореме Грауэрта-Мюлиха [2], множество $X_{[F]} = \{l \in \mathrm{Gr}(2,4) \mid \ l \cap \mathrm{Sing}(F) = \emptyset,\ F|_l \simeq 2\mathcal{O}_l\}$ является плотным подмножеством грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$ прямых пространства $\mathbb{P}^3$. Рассмотрим открытое плотное подмножество $\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_l(2))_e \subset \mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_l(2))$, состоящее из эпиморфизмов $\phi : F \twoheadrightarrow \mathcal{O}_l(2)$. Для любого элемента $\phi \in \mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_l(2))_e$ мы можем взять ядро $E = \ker\ \phi$ (переход от F к E иногда называется элементарным преобразованием F вдоль l). Легко видеть, что E – стабильный пучок и определяет точку $[E]$ схемы $\mathcal{M}(3)$. Кроме того, $\ker\phi \simeq \ker\phi'$ тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_l(2)) \simeq \mathbb{K}^*$, такой что $\phi' = g\circ\phi$. Обозначим через $[\phi]$ класс эквивалентности ϕ по модулю $\mathbb{K}^*$. Теперь рассмотрим множество $\widetilde{\mathcal{X}} = \{x = ([F], l, [\phi_x]) \mid [F] \in \mathcal{R},\ l \in X_{[F]},\ [\phi_x] \in \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_l(2))_e)\}$. Поскольку $\mathcal{R}$ является приведенной неприводимой схемой [1], множество $\widetilde{\mathcal{X}}$ имеет естественную структуру приведенной неприводимой схемы. Более того, существует корректно определенный инъективный морфизм $f : \widetilde{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{M}(3),\ \ x \mapsto [\ker\ \phi_x]$. Положим $\mathcal{X} := f(\widetilde{\mathcal{X}}) \subset \mathcal{M}(3)$. Тогда имеет место следующая

Теорема. *Замыкание $\overline{\mathcal{X}}$ схемы $\mathcal{X}$ в $\mathcal{M}(3)$ является неприводимой компонентой размерности 22, общая точка которой является стабильным пучком с особенностями смешанной размерности.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный пучок $[E] \in \mathcal{X}$, который согласно конструкции семейства $\mathcal{X}$ включается в следующую точную тройку:

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\varphi} F \longrightarrow \mathcal{O}_l(2) \longrightarrow 0, \tag{1}$$

где $[F] \in \mathcal{R}$, а l – прямая в $\mathbb{P}^3$, такая что

$$\mathrm{Sing}(F) \cap l = \emptyset, \quad F|_l \simeq 2\mathcal{O}_l. \tag{2}$$

Так как $\mathrm{hd}(F) = 1$ и $\dim \mathrm{Sing}(F) = 0$, то $\mathcal{E}xt^{\geq 1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}, F) = \mathcal{E}xt^{\geq 2}(F, F) = 0$ и пучки $\mathcal{E}xt^1(F, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$, $\mathcal{E}xt^1(F, F)$ являются артиновыми. Отсюда и из (2) следует, что

$$\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_l(2)) \simeq 2\mathcal{O}_l(2), \quad \mathcal{E}xt^i(F, \mathcal{O}_l(2)) = \mathcal{E}xt^j(\mathcal{O}_l(2), F) = 0, \quad i \geq 1, \ j \leq 1, \tag{3}$$

и морфизм φ в (1) индуцирует изоморфизм артиновых пучков

$$\mathcal{E}xt^1(F, E) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}xt^1(F, F). \tag{4}$$

Аналогично ввиду вытекающего из (1) изоморфизма $E|_U \simeq F|_U, \quad U := \mathbb{P}^3 \setminus l$, имеем изоморфизмы артиновых пучков $\mathcal{E}xt^1(F, F) \simeq \mathcal{E}xt^1(F|_U, F|_U) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}xt^1(E|_U, F|_U)$. Отсюда вытекает вложение артинова пучка $\mathcal{E}xt^1(F, F)$ в пучок $\mathcal{E}xt^1(E, F)$ в качестве прямого слагаемого, так что $\mathcal{E}xt^1(E, F) \simeq \mathcal{E}xt^1(F, F) \oplus \mathcal{E}xt^1(E, F)|_{U'}$, $U' = \mathbb{P}^3 \setminus \mathrm{Sing}(F)$. Заметим, что пучок $F|_{U'}$ локально свободен, поэтому $\mathcal{E}xt^1(E, F)|_{U'} \simeq \mathcal{E}xt^1(E|_{U'}, F|_{U'}) \simeq \mathcal{E}xt^1(E|_{U'}, \mathcal{O}_{U'}) \otimes F|_{U'}$. Кроме того, $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l(2), \mathcal{O}_{U'}) \simeq (\det N_{l/\mathbb{P}^3})(-2) \simeq \mathcal{O}_l$. Применяя к точной тройке (1), ограниченной на U', функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_{U'})$ и учитывая, что ввиду локальной свободы пучка $F|_{U'}$ пучки $\mathcal{E}xt^1(F|_{U'}, \mathcal{O}_{U'})$ и $\mathcal{E}xt^2(F|_{U'}, \mathcal{O}_{U'})$ зануляются, находим $\mathcal{E}xt^1(E|_{U'}, \mathcal{O}_{U'}) \simeq \mathcal{O}_l$. Поэтому ввиду (2) имеем $\mathcal{E}xt^1(E, F)|_{U'} \simeq 2\mathcal{O}_l$. Отсюда следует изоморфизм

$$\mathcal{E}xt^1(E, F) \simeq \mathcal{E}xt^1(F, F) \oplus 2\mathcal{O}_l. \tag{5}$$

Далее, ввиду (3) примененяя к тройке (1) функторы $\mathcal{H}om(F, -)$, $\mathcal{H}om(-, E)$ и учитывая (2)-(4) и изоморфизмы $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_l(2), E) \simeq \mathcal{H}om(\mathcal{O}_l(2), \mathcal{O}_l(2)) \simeq \mathcal{O}_l$, получаем точные тройки $0 \to \mathcal{H}om(F, E) \to \mathcal{H}om(F, F) \to 2\mathcal{O}_l(2) \to 0$, $0 \to \mathcal{H}om(F, E) \to \mathcal{H}om(E, E) \to \mathcal{O}_l \to 0$.

Мономорфизм $E \hookrightarrow F$ в (1) индуцирует мономорфизм $\tau : \mathcal{H}om(E, E) \hookrightarrow \mathcal{H}om(F, F)$, причем $\mathrm{coker}\ \tau$ является локально свободным $\mathcal{O}_l$-пучком. Две последние тройки и мономорфизм τ включаются в коммутативную диаграмму, полученную применением функторов $\mathcal{H}om(F, -)$ и $\mathcal{H}om(E, -)$ к тройке (1). Из этой диаграммы по лемме о змее следует, что $\mathrm{coker}\ \tau \simeq \mathcal{O}_l(4)$. Поэтому в результате применения функтора $\mathcal{H}om(E, -)$ к (1) мы получим точную последовательность

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_l(4) \longrightarrow \mathcal{H}om(E, \mathcal{O}_l(2)) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E, E) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E, F) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_l(2)) \xrightarrow{\psi} \mathcal{E}xt^2(E, E). \end{gathered} \tag{6}$$

С другой стороны, применяя к (1) функтор $\mathcal{H}om(-,\mathcal{O}_l(2))$ и учитывая (3) и $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_l,\mathcal{O}_l) \simeq \binom{2}{i}\mathcal{O}_l(i)$, получаем точную последовательность $0 \to \mathcal{O}_l \to 2\mathcal{O}_l(2) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H}om(E,\mathcal{O}_l(2)) \to 2\mathcal{O}_l(1) \to 0$ и изоморфизм $\mathcal{E}xt^1(E,\mathcal{O}_l(2)) \simeq \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l(2),\mathcal{O}_l(2)) \simeq \mathcal{O}_l(2)$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{im}\gamma$ – локально свободный $\mathcal{O}_l$-пучок, а значит, он изоморфен $\mathcal{O}_l(4)$. Кроме того, применяя к (1) функтор $\mathcal{H}om(-,E)$ мы получим $\mathcal{E}xt^2(E,E) \simeq \mathcal{E}xt^3(\mathcal{O}_l(2),E) \simeq 0$, поскольку $\mathrm{hd}(F) = 1$ и $\mathrm{hd}(\mathcal{O}_l) = 2$. Таким образом, из (5), (6) и того факта, что $\mathcal{E}xt^1(F,F)$ – артинов пучок, следует точная тройка $0 \to 2\mathcal{O}_l(1) \to \mathcal{E}xt^1(E,E) \to \mathcal{E}xt^1(F,F) \oplus \mathcal{O}_l(-2) \to 0$. Отсюда $h^0(\mathcal{E}xt^1(E,E)) = 4 + h^0(\mathcal{E}xt^1(F,F))$.

Как было показано выше, точна тройка $0 \to \mathcal{H}om(E,E) \xrightarrow{\tau} \mathcal{H}om(F,F) \to \mathcal{O}_l(4) \to 0$. Так как пучки E и F стабильны, то они просты, т. е. $h^0(\mathcal{H}om(E,E)) = h^0(\mathcal{H}om(F,F)) = 1$. Отсюда и из леммы следуют равенства

$$h^1(\mathcal{H}om(E,E)) = 5 + h^1(\mathcal{H}om(F,F)), \quad h^2(\mathcal{H}om(E,E)) = 0. \tag{7}$$

Кроме того, из равенства $H^2(\mathcal{H}om(F,F)) = 0$ (см. [4, Lemma 1]) и [1, теорема 2.8] имеем $h^0(\mathcal{E}xt^1(F,F)) + h^1(\mathcal{H}om(F,F)) = \dim \mathrm{Ext}^1(F,F) = \dim \mathcal{R} = 13$. Следовательно, учитывая (7), полученное выше равенство для $h^0(\mathcal{E}xt^1(E,E))$ и точную последовательность $0 \to H^1(\mathcal{H}om(E,E)) \to \mathrm{Ext}^1(E,E) \to H^0(\mathcal{E}xt^1(E,E)) \to H^2(\mathcal{H}om(E,E))$, находим $\dim \mathrm{Ext}^1(E,E) = 22$. С другой стороны, размерность схемы $\mathcal{X}$ равна $\dim \mathcal{X} = \dim \widetilde{\mathcal{X}} = \dim \mathcal{R} + \dim \mathrm{Gr}(2,4) + \dim \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(F,\mathcal{O}_l(2))_e) = 22$. Таким образом, для любой точки $[E] \in \mathcal{X}$ имеет место $\dim \mathrm{Ext}^1(E,E) = \dim \mathcal{X}$. Следовательно, замыкание $\overline{\mathcal{X}}$ – неприводимая компонента размерности 22 схемы $\mathcal{M}(3)$. Из конструкции схемы $\mathcal{X}$ видно, что общая точка $[E] \in \overline{\mathcal{X}}$ является стабильным пучком с особенностями на $l \sqcup \mathrm{Sing}(F)$. Поскольку $\dim \mathrm{Sing}(F) = 0$, особенности пучка E имеют смешанную размерность. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M.-C. Chang, Stable rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$ with small c_2 and applications. Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 57–89.

[2] D. Huybrechts, M. Lehn, The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves, 2nd ed., Cambridge Math. Lib., Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[3] Jardim M., Markushevich D., Tikhomirov A. S., Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on $\mathbb{P}^3$ // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2017. P. 1-36.

[4] Ivanov A. N., Tikhomirov A. S., Semistable rank 2 sheaves with singularities of mixed dimension on $\mathbb{P}^3$, arXiv:1703.04851.