Расслоения на поверхности дель Пеццо и их стандартные модели

К. Логинов

Программа минимальных моделей (Minimal Model Program, MMP) является мощным средством классификации алгебраических многообразий. Результатом ее применения к гладкому проективному многообразию X является многообразие X', бирационально изоморфное X, для которого есть две возможности:

(i) X' — минимальная модель, то есть канонический класс $K_{X'}$ численно эффективен;
(ii) X' обладает структурой расслоения Фано-Мори $\pi\colon X' \longrightarrow B$ над некоторой базой B, то есть $-K_{X'}$ относительно обилен и $\rho(X'/B) = 1$.

Бирациональное отображение $f : X \dashrightarrow X'$ является композицией флипов (перестроек в коразмерности 2 и выше) и дивизориальных стягиваний.

В размерности 2 программа минимальных моделей естественным образом работает в категории гладких многообразий. Хорошо известно, что для поверхностей минимальная модель единственна.

Мы сконцентрируемся на трехмерной ситуации. В этом случае естественной категорией, в которой работает MMP, является категория многообразий с $\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями. Пусть X — такое многообразие, определенное над произвольным полем $\mathbb{K}$ характеристики 0 и снабженное действием конечной группы G. В этом случае существует G-эквивариантная программа минимальных моделей (G-MMP). Изучение таких многообразий мотивировано задачей классификации конечных подгрупп в группе Кремоны

$$\mathrm{Cr}(n, \mathbb{K}) = \mathrm{Bir\ Aut}\ \mathbb{P}^n(\mathbb{K}).$$

Пусть результатом применения G-MMP к многообразию X является расслоение Фано-Мори $\pi\colon X' \longrightarrow B$ (отметим, что это так, если X рационально). Имеем следующие случаи:

(i) Если $\dim\ B = 0$, то X' является (быть может, особым) многообразием Фано с действием группы G. Мы будем называть их многообразиями типа $G\mathbb{Q}$-Фано. Задача их классификации является открытой.
(ii) Если $\dim\ B = 2$, то X' является расслоением на коники. В этом случае Саркисов построил стандартную модель таких расслоений, а именно

следующую перестройку многообразия X' и базы B

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[d] \\ B \arrow[r, dashed] & S \end{tikzcd}$$

что многообразия Y и S неособы. Аналогичный результат в случае G-многообразий был получен Авиловым.

(iii) Нас интересует случай $\dim B = 1$. Тогда общим слоем отображения π является неособая поверхность дель Пеццо. Мы называем такие расслоения $G\mathbb{Q}$-расслоениями на поверхности дель Пеццо, а их степенью — степень общего слоя. Мы строим стандартную модель таких расслоений степени 1, а именно модель с каноническими горенштейновыми особенностями.

Сформулируем результат более точно (здесь обобщенное расслоение — такое, от которого мы не требуем $\rho^G(X_\eta) = 1$).

Теорема 1. *Пусть X — трехмерное алгебраическое G-многообразие и пусть C — алгебраическая G-кривая. Пусть $\pi : X \dashrightarrow C$ — G-эквивариантное рациональное отображение, общий слой X_η которого — неособая поверхность дель Пеццо степени 1 с $\rho^G(X_\eta) = 1$. Тогда существует горенштейнова модель, то есть такое обобщенное G-расслоение на поверхности дель Пеццо $\sigma : Y \longrightarrow C$ степени 1, что Y имеет горенштейновы канонические особенности и имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\chi"] \arrow[dr, dashed, "\pi"'] & & Y \arrow[dl, "\sigma"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Хорошо известно, что поверхность дель Пеццо степени 1 допускает каноническое вложение во взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(1,1,2,3)$. Мы строим аналогичное вложение для $G\mathbb{Q}$-расслоений на поверхности дель Пеццо степени 1. А именно, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Обобщенное G-расслоение на поверхности дель Пеццо степени 1 с горенштейновыми каноническими особенностями $\sigma : Y \longrightarrow C$ допускает вложение над C в относительное взвешенное проективное пространство*

$$Y \hookrightarrow \mathbb{P}_C(1,1,2,3).$$