Клейновы особенности и их применения

Известно, что конечные подгруппы группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ классифицируются диаграммами Дынкина без кратных связей, то есть ADE-диаграммами. Клейнова особенность — это аффинное многообразие вида $\mathbb{C}^2/G$, где G — конечная подгруппа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Клейновы особенности и их деформации допускают различные характеризации и имеют применения в различных разделах математики.

Основные свойства разрешений особенностей Клейновых деформаций содержатся в следующей теореме, доказанной Слодови [3]:

Theorem 0.1. *Пусть $Y = \mathbb{C}^2/G$ — Клейнова особенность типа Δ. Тогда*

1. *Y обладает минимальным разрешением особенностей $\pi\colon X \to Y$: любое другое разрешение особенностей пропускается через π.*

2. *Исключительный слой $L = \pi^{-1}(0)$ представляет из себя объединений нескольких проективных прямых $\mathbb{P}$. Их количество совпадает с количеством вершин в графе Δ. Более того, существует биекция между проективными прямыми и вершинами Δ такая, что две прямые пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие вершины в графе Δ соединены ребром.*

Также X и Y могут быть получены как колчанные многообразия [6].

Одна из характеризаций Клейновых особенностей связана с простыми алгебрами Ли соответствующего типа. Пусть G — простая группа Ли типа $\Delta = A_r$, D_r или E_r, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана, W — группа Вейля. Теорема Шевалле утверждает, что $\mathfrak{g}/G$ изоморфно $\mathfrak{h}/W$. Обозначим проекцию с $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}/W$ за γ. Пусть x — субрегулярный нильпотентный элемент $\mathfrak{g}$, S — трансверсальный слайс к Gx в точке x. Тогда верна следующая теорема, сформулированая Брискорном и доказанная в полной общности Слодови [7]:

Theorem 0.2. 1. *Обозначим за $Nil(\mathfrak{g})$ множество нильпотентных элементов $\mathfrak{g}$. Тогда $S \cap Nil(\mathfrak{g})$ — подмнообразией с Клейновой особенностью типа Δ.*

2. *$\gamma|_S$ является полууниверсальной деформацией особенности $(S \cap Nil(\mathfrak{g}), x)$.*

Аналитический аналог Клейновых особенностей — простые особенности — активно используется в теории особенностей гладких отображений [4].

Поставленная задача и результаты

Предположим, что две конечные подгруппы SL(2) вложены друг в друга: $G_1 \subset G_2$. Тогда соответствующие подалгебры инвариантов вложены в другую сторону: $\mathbb{C}[u,v]^{G_2} \subset \mathbb{C}[u,v]^{G_1}$. Обозначим соответствующее вложение буквой i.

Рассмотрим функтор gr взятия ассоциированной градуированной алгебры. Этот функтор действует из категории фильтрованных алгебр в категорию градуированных алгебр. Допуская нестрогость обозначений, обозначим за gr естественное отображение из A в $\operatorname{gr} A$. Попытаемся классифицировать морфизмы фильтрованных алгебр ϕ такие, что $\operatorname{gr}\phi = i$. Условие $\operatorname{gr}\phi = i$ равносильно тому, что

1. ϕ действует из A_2 в A_1, где A_j — фильтрованная деформация $\mathbb{C}[u,v]^{G_j}$.

2. Для любого элемента x алгебры A_2 выполнено равенство $\operatorname{gr}\phi(x) = \phi(\operatorname{gr}(x))$.

Назовем такие гомоморфизмы фильтрованных алгебр ϕ фильтрованными деформациями вложения $\mathbb{C}[u,v]^{G_2}$ в $\mathbb{C}[u,v]^{G_1}$.

Задача о классификации деформаций этого вложения является шагом на пути к обобщению метода орбит на полупростые алгебры Ли. Отображение из присоединенных орбит в множество примитивных идеалов построено в работе [5].

В дальнейшем мы будем предполагать, что G_1 нормальна в G_2. Тогда существует серия деформаций i следующего вида. Пусть c — элемент $Z(\mathbb{C}[G_1]) \cap Z(\mathbb{C}[G_2])$. Рассмотрим алгебры $\mathcal{O}_c^1$, $\mathcal{O}_c^2$, где алгебра $\mathcal{O}_c^j$ является фильтрованной CBH-деформацией [1] алгебры $\mathbb{C}[G_j]$ с параметром c. Нетрудно доказать, что

1. Группа G_2/G_1 действует на $\mathcal{O}_c^1$.

2. Соответсвующая подалгебра инвариантов $(\mathcal{O}_c^1)^{G_2/G_1}$ совпадает с $\mathcal{O}_c^2$.

3. Получившееся вложение $\mathcal{O}_c^1$ в $\mathcal{O}_c^2$, которое мы обозначим буквой ι, является деформацией вложения $\mathbb{C}[u,v]^{G_2}$ в $\mathbb{C}[u,v]^{G_1}$.

Полученный результат заключается в следующем:

Theorem 0.3. *Пусть ϕ – такая деформация вложения, что алгебры A_1, A_2 коммутативны. Тогда существует такой параметр $c \in Z(\mathbb{C}[G_2]) \cap Z(\mathbb{C}[G_1])$ и изоморфизмы фильтрованных алгебр $\psi_1 \colon A_1 \to$*

$\mathcal{O}_c^1$, $\psi_2\colon A_2 \to \mathcal{O}_c^2$, *что следующий квадрат коммутативен:*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi_1"] & A_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\ \mathcal{O}_c^1 \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{O}_c^2 \end{tikzcd}$$

Приведем конкретный пример деформации вложения в случае $C_3 \subset C_6$. Группа C_n порождается матрицей $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Подалгебра инвариантов группы C_n порождается элементами $x = uv$, $y = u^n$, $z = v^n$ и задается одним соотношением: $x^n = yz$. Произвольная коммутативная деформация $\mathbb{C}[u,v]^{C_n}$ выглядит как $\mathbb{C}[x,y,z]/(yz - x^n - \sum_{i=0}^{n-2} a_i x^i)$, где $a_i \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим коммутативную фильтрованную деформацию $A_1 = \mathbb{C}[x,y,z]/(yz - x^3 - x - 1)$ алгебры $\mathbb{C}[u,v]^{C_3}$ и коммутативную деформацию $A_2 = \mathbb{C}[x,y,z]/(yz - (x^3 + x + 1)^2)$ алгебры $\mathbb{C}[u,v]^{C_6}$. Отображение из A_2 в A_1, отправляющее x, y, z в x, y^2, z^2 соответственно, является деформацией вложения $\mathbb{C}[u,v]^{C_6}$ в $\mathbb{C}[u,v]^{C_3}$.

Список литературы

[1] Crawley-Boevey, William; Holland, Martin P. Noncommutative deformations of Kleinian singularities. Duke Math. J. 92 (1998), no. 3, 605–635

[2] http://www.mi.uni-koeln.de/ burban/singul.pdf

[3] P. Slodowy, Platonic solids, Kleinian singularities, and Lie groups, Algebraic geometry (Ann Arbor, Mich., 1981), Lecture Notes in Math., vol. 1008, Springer, Berlin, 1983, pp. 102–138, DOI 10.1007/BFb0065703. MR723712 (85f:14037)

[4] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, Особенности дифференцируемых отображений.

[5] arXiv:1605.00592 [math.RT]

[6] Alexander Kirillov Jr., Quiver Representations and Quiver Varieties.

[7] P. Slodowy, Simple singularities and simple algebraic groups.