3-подгруппы в группе Кремоны ранга 3

Александра Кузнецова

1 Постановка вопроса

С любым алгебраическим многообразием естественно связано две группы преобразований, а именно группа регулярных и группа бирациональных автоморфизмов. В большинстве случаев обе они совпадают и конечны, однако в некоторых случаях, например, в случае проективного пространства, окажется, что в отличае от $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) = \mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{C})$, группа бирациональных преобразований $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ бесконечномерна при $n > 2$. Эта группа называется *группой Кремоны ранга n* и является очень интересным объектом для изучения.

Один из способов изучить необозримо большую группу это перейти к ее конечным подгруппам, поэтому мы собираемся изучать p-подгруппы для простых чисел p (подгруппы порядка p^n, возможно неабелевы) в группах Кремоны. Такие подгруппы в группах бирациональных автоморфизмов уже изучались: так, например, в статье Прохорова и Шрамова [PS16] описаны p-подгруппы группы Кремоны ранга 3 для больших значений p и показано, что для $p \geq 17$ любая p-подгруппа $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3)$ абелева с не более чем тремя образующими.

Наша цель — изучить случай $p = 3$, то есть дать некоторое описание всем 3-подгруппам групп Кремоны рангов два и три. Мы докажем следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Пусть X рационально-связное гладкое многообразие и G некоторая 3-подгруппа в его бирациональных автоморфизмах. Тогда*

1. *если $\dim X = 2$, то у G не более 3 образующих.*
2. *если $\dim X = 3$, то у G не более 6 образующих.*

Эта теорема влечет утверждение, описывающее 3-подгруппы групп Кремоны рангов два и три:

Следствие 1.2. *Любая 3-подгруппа группы $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ имеет не более 3 образующих. Любая 3-подгруппа $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3)$ имеет не более 6 образующих.*

2 Стратегия доказательства

Важнейший факт, который мы будем использовать состоит в том, что действие любой конечной подгруппы бирациональных преобразований регуляризуется:

Предложение 2.1 ([PS14, Лемма-определение 3.1])**.** *Рассмотрим некоторую конечную подгруппу G в группе $\mathrm{Bir}(X)$. Тогда найдется гладкое G-многообразие $\tilde{X}$ и G-эквивариантное бирациональное отображение $\tilde{X} \dashrightarrow X$.*

В свете этого утверждения мы будем действовать так:

- Мы начинаем с рационально-связного многообразия X и 3-подгруппы G в группе $\mathrm{Bir}(X)$;
- Пользуясь предложением 2.1 мы заменяем X на многообразие $\tilde{X}$ на котором G действует регулярно;
- Применяя G-эквивариантную программу минимальных моделей, мы переходим к модели X_0 с регулярным действием G и минимальной относительно этого действия.
- В таком случае X_0 это расслоение Мори или же многообразие Фано с точным регулярным действием группы G.

Таким образом нам достаточно изучить подгруппы в группах регулярных автоморфизмов расслоений Мори и многообразий Фано в размерностях два и три.

В двумерном случае все относительно просто: расслоение Мори в этом случае это расслоение на коники, а двумерные многообразия Фано это поверхности дель Пеццо. Все эти объекты хорошо изучены и используя разнообразные их свойства можно заключить желаемый результат.

3 Трехмерный случай

В размерности три все становится несколько сложнее: в этом случае программа минимальных моделей может выдавать многообразие с особенностями, поэтому, применяя указанную выше стратегию, мы получаем многообразие X_0 одного из трех типов:

- X_0 — расслоение Мори, то есть расслоение на G-минимальные рационально-связные поверхности над $\mathbb{P}^1$ или же расслоение на коники над двумерной G-минимальной рационально-связной поверхностью;
- X_0 — многообразие Фано с непустым множеством негоренштейновых терминальных особенностей;
- X_0 — многообразие Фано с не более чем горенштейновыми терминальными особенностями.

В первом случае, пользуясь результатами двумерного случая мы получаем оценку 4 на количество образующих G.

Во втором случае нам необходимы некоторые выводы из теории терминальных особенностей, а именно такое следствие из теоремы Римана–Роха в особом случае:

Предложение 3.1 ([Ried87]). *Если Y многообразие Фано с m негоренштейновыми терминальными особенностями, то $m \leq 16$.*

Используя эту оценку, мы видим, что длина орбиты G, содержащей особую точку $x \in X_0$, не больше 9 и, оценивая стабилизатор, Чтобы оценить стабилизатор используем следующее наблюдение:

Предложение 3.2 ([Pop14, Лемма 4]). *Пусть редуктивная группа G действует на многообразии Y и сохраняет некоторую точку x, тогда каноническое отображение $G \to \mathrm{GL}(T_x)$ является вложением.*

Мы можем поднять действие стабилизатора H точки x до действия его расширения $\tilde{H}$ на горенштейновом накрытии X_0 и в силу предложения $\tilde{H} \subset \mathrm{GL}(T_{\tilde{x}}) = \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$, где $\tilde{x}$ прообраз x в горенштейновом накрытии. Таким образом количество образующих $\tilde{H}$, а значит и H оцениватся числом 4, следовательно у G не больше 6 образующих.

Третий случай это случай горенштейновых терминальных многообразий Фано. Здесь мы, применяем теорему Намикавы о сглаживании:

Предложение 3.3 ([Nam97]). *Пусть Y — трехмерное многообразие Фано с не более чем горенштейновыми терминальными особенностями. Тогда существует плоский собственный морфизм многообразий $\mathcal{Y} \to \mathbb{C}$, так что Y изоморфно слою $\mathcal{Y}_0$ над точкой 0, а общий слой $\mathcal{Y}_z$ — гладкий и количество особых точек Y выражается через когомологические инварианты общего слоя.*

Таким образом мы в большинстве случаев можем оценить количество особых точек числом 9 и применить ту же стратегию, что и в случае негоренштейновых особенностей. Количество образующих G оценится числом 6.

Остается изучить группы автоморфизмов гладких многообразий Фано и небольшое количество многообразий Фано с горенштейновыми терминальными особенностями. В этих случаях существуют явные описания многообразий и пользуясь ими мы получаем все ту же оценку 6 на количество образующих группы G.

Список литературы

[IP99] V.A. Iskovskikh, Y. Prokhorov.: Fano varieties, Encyclopaedia Math. Sci. Algebraic geometry, V, Springer, 1999.

[DI09] I. Dolgachev and V. Iskovskikh: Finite subgroups of the plane Cremona group, Algebra, Arithmetic, and Geometry In Honor of Yu. I. Manin, Progr. Math., 269–270, Birkhauser, 2009.

[Nam97] Y. Namikawa: Smoothing Fano 3-folds. J. Algebraic Geom., 6(2): 307–324, 1997.

[Pop14] Vl. Popov: Jordan groups and automorphism groups of algebraic varieties. In I. Cheltsov, C. Ciliberto, H. Flenner, J. McKernan, Y. G. Prokhorov, and M. Zaidenberg, editors, Automorphisms in birational and affine geometry. Levico Terme, Italy, October 2012, volume 79 of Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, pages 185–213. 2014.

[PS14] Y. Prokhorov, C. Shramov: Jordan property for groups of birational selfmaps, Compositio Math., 150(12): 2054-2072, 2014.

[PS16] Y. Prokhorov, C. Shramov: p-subgroups in the space Cremona group, 2016.

[Ried87] M. Reid: Young person's guide to canonical singularities, Proceeding of Symposia of Pure Mathematics, Volume 48, 1987.