К3 на Фонтанке,

лекция 5: все К3 диффеоморфны

Миша Вербицкий

Первая летняя математическая школа на Фонтанке: Геометрия 2017

8 июля 2017

K3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **K3-поверхность** есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы** (Бухдаль-Ламари).

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Каноническое расслоение K_M тривиально.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика M, получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для K3-поверхности:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 0 & & 0 & \\
1 & & 20 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 1 & &
\end{array}
$$

Классификация форм пересечения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметричная билинейная форма η на $V := \mathbb{Z}^n$ называется **унимодулярной**, если она задает изоморфизм $V \longrightarrow V^*$, **четной**, если множество всех $\eta(x,x)$ содержится в $2 \cdot \mathbb{Z}$, и **нечетной** если нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметричная 2-форма η называется **неопределенной**, если $\eta(x,x) < 0$ и $\eta(y,y) > 0$ для каких-то x и y.

ТЕОРЕМА:
(классификация унимодулярных симметричных билинейных форм):
Пусть q – четная унимодулярная неопределенная форма на V. **Тогда** (V,q) **разлагается в ортогональную прямую сумму** подпространств с билинейной формой, которая имеет вид $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (такие пространства называются "гиперболическими"), и подпространств $E_{\pm 8}$, изоморфных решетке пересечения корней алгебры E_8:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

или такой же решетке с формой пересечения противоположного знака.

ТЕОРЕМА: **Форма пересечения на $H^2(3)$ это $U^3 \oplus (-E_8)^2$.**

Гладкие квартики (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гладкой квартикой** называется гладкая гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$, заданная неприводимым однородным полиномом степени 4.

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Эйлера, каноническое расслоение на $\mathbb{C}P^n$ есть $\mathcal{O}(-n-1)$. Формула присоединения, примененная к гладкой поверхности $Z \subset \mathbb{C}P^n$ степени m, дает $N^*Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} K_Z = K_{\mathbb{C}P^n}|_Z$, а коль скоро $N^*Z = \mathcal{O}(-m)$ и $K_{\mathbb{C}P^n} = \mathcal{O}(-n-1)$, **имеем $K_Z = \mathcal{O}(m-n-1)$.**

СЛЕДСТВИЕ: **Гладкая квартика в $\mathbb{C}P^3$ есть поверхность с тривиальным каноническим классом.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, говоря про "гладкие квартики", **я буду подразумевать квартики размерности 2.**

ТЕОРЕМА: **Любая гладкая квартика есть К3 поверхность.**

(было на прошлой лекции)

Формула Римана-Роха-Хирцебруха (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть L, L' – линейные расслоения на повекрхности X. Число $\int_X c_1(L)\wedge c_1(L')$ обозначается (L,L'), и называется **индекс пересечения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эйлерова характеристика** когерентного пучка F есть число $\chi(F) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(F)$.

Напомним **формулу Римана-Роха** для поверхности:

ТЕОРЕМА: Для любого линейного расслоения L на поверхности, $\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{(L-K_X,L)}{2}$.

Для К3-поверхности, $\chi(\mathcal{O}_X) = h^{0,0}(X) - h^{0,1}(X) + h^{0,2}(X) = 2$, а $c_1(K_X) = 0$. Получаем:

ТЕОРЕМА: **Для любого линейного расслоения L на К3, $\chi(L) = 2 + \frac{(L,L)}{2}$.**

Линейные расслоения на К3

Пусть (M, I) – К3-поверхность. Поскольку форма пересечения совместима с разложением Ходжа, $(H^{2,0}(M) \oplus H^{0,2}(M))^\perp = H^{1,1}(M)$. Пространство $H^{2,0}(M) \oplus H^{0,2}(M)$ есть комплексификация $\operatorname{Per}(I) := \langle \operatorname{Re}\Omega, \operatorname{Im}\Omega\rangle$, где Ω обозначает класс голоморфной симплектической формы.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, I) есть К3-поверхность, а $W := \operatorname{Per}(I) \in G_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$. **Тогда** $H^{1,1}_I(M, \mathbb{R}) = W^\perp$ (ортогональное дополнение).

СЛЕДСТВИЕ: Для любой К3, $\operatorname{Pic}(M, I) = NS(M, I) = H^{1,1}_I(M, \mathbb{Z})$ – **множество целочисленных векторов, ортогональных** $W = \operatorname{Per}(I) \in G_{+,+}(H^2(M, \mathbb{R}))$.

СЛЕДСТВИЕ: Для общей К3-поверхности, группа $\operatorname{Pic}(M, I)$ тривиальна.

Обильные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Очень обильное расслоение** есть линейное расслоение вида $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$, где $\varphi: M \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ – проективное вложение. **Обильное расслоение** есть линейное расслоение, положительная степень которого обильна.

ТЕОРЕМА: **(Кодаира)** **Расслоение L обильно тогда и только тогда, когда $c_1(L)$ – кэлеров класс.**

СЛЕДСТВИЕ: Любое положительное (положительной степени, то есть с положительным c_1) расслоение на комплексной кривой **обильно.**

Очень обильные расслоения

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите следующее. Пусть L линейное расслоение над X, и для любых двух точек $x, y \in X$ найдется сечение L, которое равно нулю в x, и ненулевое в y, и другое сечение, которое ненулевое в x, и нулевое в y. **Тогда X биективно отображается в $\mathbb{P}H^0(X,L)^*$.** Если, к тому же, для каждой точки $x \in X$ есть сечение $f \in H^0(L)$, зануляющееся в ней, и такое, что $df|_x^* \neq 0$, то **естественное отображение $X \hookrightarrow \mathbb{P}H^0(X,L)^*$ — гладкое вложение,** а **L очень обильно**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за k_x **пучок-небоскреб** в точке $x \in M$, то есть пучок вида $\mathcal{O}_M/I_x$, где I_x идеал функций, зануляющихся в x.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть L расслоение на многообразии X, такое, что для любых двух точек $x, y \in X$, естественное отображение

$$H^0(X,L) \longrightarrow H^0(L \otimes_{\mathcal{O}_X} k_x \oplus L \otimes_{\mathcal{O}_X} k_y)$$

сюрьективно, и $H^0(X,L) \longrightarrow H^0(L/L \otimes I_x^2)$ сюрьективно. **Тогда L очень обильно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Сюрьективность $H^0(X,L) \longrightarrow H^0(L \otimes_{\mathcal{O}_X} k_x \oplus L \otimes_{\mathcal{O}_X} k_y)$ есть первое условие упражнения, сюрьективность $H^0(X,L) \longrightarrow H^0(L/L \otimes I_x^2)$ – второе условие. ■

Каноническое отображение кривой

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – комплексное многообразие, такое, что глобальные сечения канонического расслоения K_X не имеют общих нулей. **Каноническое отображение** есть стандартное отображение $X \longrightarrow \mathbb{P}H^0(X, K_X)$.

ТЕОРЕМА: Пусть C – кривая рода $\geqslant 2$, а $\Psi: C \longrightarrow \mathbb{P}H^0(K)$ – каноническое отображение. **Тогда Ψ это вложение либо двулистное разветвленное накрытие,** образ которого $\mathbb{C}P^1$ (во втором случае C называется **гиперэллиптической кривой**).

Доказательство. Шаг 1: Сначала докажем, что сечения K не имеют общих нулей **("базисных точек" K)**, если C не $\mathbb{C}P^1$. Пусть $p \in C$ точка. Напишем точную последовательность

$$0 \longrightarrow K(-p) \longrightarrow K \longrightarrow k_p \longrightarrow 0$$

Если p – базовая точка, из соответствующей длинной точной последовательности следует, что $H^1(K(-p)) \neq 0$. **Двойственность Серра влечет $H^1(K(-p)) = H^0(\mathcal{O}(p))^*$, что дает рациональное сечение $\mathcal{O}$ с одним полюсом, то есть голоморфное отображение в $\mathbb{C}P^n$ степени 1.**

Каноническое отображение кривой (2)

ТЕОРЕМА: Пусть C – кривая рода $\geqslant 2$, а $\Psi: C \longrightarrow \mathbb{P}H^0(K)$ каноническое отображение. **Тогда Ψ это вложение либо двулистное разветвленное накрытие,** образ которого $\mathbb{C}P^1$ (во втором случае C называется **гиперэллиптической кривой**).

Шаг 2: Аналогично, если каноническое отображение склеивает p и q, имеем $H^1(K(-p-q)) \neq 0$, что дает $\dim H^0(\mathcal{O}(p+q)) \neq 0$, то есть C **допускает рациональную функцию с двумя полюсами, то есть допускает голоморфное отображение в $\mathbb{C}P^1$ степени 2.**

Шаг 3: Осталось доказать, что образ Ψ равен $\mathbb{C}P^1$ в случае, когда C гиперэллиптическая. Пусть τ – инволюция, переставляющая листы накрытия. Поскольку $\mathbb{C}P^1$ не имеет голоморфных дифференциалов, τ действует на $H^0(K)$ без неподвижных точек, то есть как -1. Поэтому Ψ склеивает x с $\tau(x)$. ■

К3-поверхности с одномерной группой Пикара

Теорема 1: Пусть (M, I) есть К3-поверхность, а L линейное расслоение с $(L, L) \geqslant 4$. Предположим, что группа $\operatorname{Pic}(M, I) = NS(M, I) = H_I^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ имеет ранг 1 и порождена классом $c_1(L)$. **Тогда L либо L^* очень обильно.**

Начнем с того, что докажем, что у L нет базисных точек (то есть точек, где все голоморфные сечения L зануляются).

ЗАМЕЧАНИЕ: Обозначим за $|L|$ **линейную систему, заданную L**, то есть множество всех дивизоров нулей всех $\gamma \in H^0(L)$. Базисные точки $|L|$ это $\bigcap_{D \in |L|} D$.

К3-поверхности с одномерной группой Пикара (2)

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) есть К3-поверхность, а L линейное расслоение с $(L, L) > 0$. Предположим, что группа $\operatorname{Pic}(M, I) = H_I^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ имеет ранг 1 и порождена классом $c_1(L)$. **Тогда у L нет базисных точек.**

Доказательство. Шаг 1: Риман-Рох: $h^0(L) - h^1(L) + h^2(L) = \chi(L) = 2 + \frac{(L,L)}{2}$. Двойственность Серра дает $H^0(L^*)^* = H^2(L \otimes K_M) = H^2(L)$, то есть $h^0(L^*) = h^2(L)$. Поэтому $h^0(L) + h^0(L^*) \geqslant 2$, то есть либо L, либо L^* имеет голоморфные сечения. Заменив L на L^*, если потребуется, **можем считать, что $h^0(L) > 0$.**

Шаг 2: Пусть D есть дивизор нулей общего сечения L. Поскольку класс когомологий $[D]$ порождает $\operatorname{Pic}(M, I)$, дивизор D неприводим. Нормальное расслоение к D есть $L|_D$, то есть его степень равна $D^2 >= 2$. Из точной последовательности $0 \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow L \longrightarrow L|_D \longrightarrow 0$ и $H^1(\mathcal{O}_M) = 0$ следует, что **отображение ограничения $\Psi: H^0(M, L) \longrightarrow H^0(D, L|_D)$ сюрьективно.**

Шаг 3: Поскольку нормальное расслоение $L|_D$ двойственно касательному, оно изоморфно каноническому расслоению. Значит, отображение $\Psi: M \longrightarrow \mathbb{P}H^0(M, L)^*$ в ограничении на D дает **каноническое отображение $D \longrightarrow \mathbb{P}H^0(D, K_D)^*$**. В силу доказанного выше, это либо двулистное накрытие, либо вложение. **Значит, у L нет базисных точек.** ■

K3-поверхности с одномерной группой Пикара (3)

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) есть K3-поверхность, причем группа $\operatorname{Pic}(M, I) = H^{1,1}_I(M, \mathbb{Z})$ одномерна, $\operatorname{Pic}(M, I) = \mathbb{Z} \cdot \eta$. Обозначим за L образующую $\operatorname{Pic}(M, I)$, $c_1(L) = \eta$. Предположим, что $(L, L) \geqslant 4$. **Тогда L либо L^* очень обильно.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим стандартное отображение $\Psi : M \longrightarrow \mathbb{P}H^0(M, L)^*$. Оно не стягивает кривых, потому что $NS(M, I) = \mathbb{Z} \cdot \eta$, и L в ограничении на любую кривую нетривиально. Если оно склеивает две точки x и y, то любая кривая $D \in |L|$, проходящая через x и y, гиперэллиптична.

Шаг 2: Такие гиперплоскости целиком покрывают $\mathbb{C}P^3$, а значит, такие кривые целиком покрывают M. Поэтому, если в $|L|$ есть хоть одна гиперэллиптическая кривая, Ψ как минимум двулистно, а все кривые $D \in |L|$ гиперэллиптичны.

К3-поверхности с одномерной группой Пикара (4)

Теорема 1: Пусть (M, I) есть К3-поверхность, а L линейное расслоение с $(L, L) = 4$. Предположим, группа $\operatorname{Pic}(M, I) = NS(M, I) = H_I^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ имеет ранг 1 и порождена $c_1(L)$. **Тогда L либо L^* очень обильно.**

Шаг 3: Пусть $D_1, D_2 \in |L|$. Поскольку D_i двулистно накрывает $\Psi(D_i)$, индекс пересечения $\Psi(D_1)$ и $\Psi(D_2)$ равен $\frac{(D_1 D_2)}{4}$, значит, Ψ склеивает 4 точки из $D_1 \cap D_2$ в одну, и Ψ как минимум четырехлистно. Пусть $x, y, z \in M$ три точки, которые склеились в одну, а H – гиперплоскость в $\mathbb{P}H^0(M, L)^* = \mathbb{P}H^0(M, L)^*$, которая проходит через эти 3 точки. На соответствующей гиперэллиптической кривой $D = \Psi^{-1}(H)$ 3 точки склеились в одну при каноническом отображении, что невозможно. **Значит, гиперэллиптических кривых в $|L|$ нет.** ■

Обильные расслоения на квартиках

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M,I) – К3-поверхность, $H^{1,1}_I(M,\mathbb{Z})$ – ее решетка Нерона-Севери. **Поверхность (M,I) изоморфна квартике тогда и только тогда, когда $\operatorname{Pic}(M,I)=H^{1,1}_I(M,\mathbb{Z})$ содержит очень обильное расслоение L с $(L,L)=4$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть (M,I) вкладывается в $\mathbb{C}P^3$ как гладкая гиперповерхность степени 4, а $L=\mathcal{O}(1)|_M$. Тогда

$$(L,L)=\int_M c_1(L)\wedge c_1(L)=\int_{\mathbb{C}P^3}[M]\wedge[H]\wedge[H]$$

где $[H]$ есть фундаментальный класс гиперплоского сечения, а $[M]=4[H]$ – фундаментальный класс M. **Поэтому $(L,L)=\int_{\mathbb{C}P^3}4[H]\wedge[H]\wedge[H]=4$.**

Шаг 2: Пусть M есть К3, а L – очень обильное расслоение с $(L,L)=4$. Риман-Рох: $h^0(L)=h^0(L)-h^1(L)+h^2(L)=\chi(L)=2+\frac{(L,L)}{2}=4$. Рассмотрим соответствующее вложение $M\longrightarrow\mathbb{P}H^0(M,L)^*$ (оно переводит $m\in M$ и функционал $\lambda\in(L|_m)^*$ в $\lambda:\ H^0(M,L)\longrightarrow\mathbb{C}$). **Степень этой гиперповерхности можно вычислить по формуле $\deg M=\int_M c_1(\mathcal{O}(1))\wedge c_1(\mathcal{O}(1))=(L,L)=4$.** ■

Пространство Тейхмюллера почти поляризованных К3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\eta \in H^2(M,\mathbb{Z})$ – ненулевой класс когомологий на К3, $(\eta,\eta) > 0$. Обозначим за $\mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ множество $W \in \mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$, ортогональных η. Это пространство называется **пространство периодов поляризованных К3**.

СЛЕДСТВИЕ: Множество $\mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ периодов всех К3, для которых η имеет тип (1,1), есть $\{l \in \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{C}) \mid (l,l) = 0, (l,\bar{l}) > 0, \quad (l,\eta) = 0\}$. **Это дивизор в $\mathbb{P}\mathrm{er}$** **(проверьте это)**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за Teich_η пространство Тейхмюллера всех комплексных структур на К3, для которых класс $\eta \in H^2(M,\mathbb{Z})$ имеет тип (1,1). Это пространство называется **пространством Тейхмюллера почти поляризованных К3**. Пространство $\mathrm{Teich}_\eta^{pol} \subset \mathrm{Teich}_\eta$, состоящее из всех К3, для которых $\pm\eta$ – кэлеров класс, называется **пространством Тейхмюллера поляризованных К3**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из локальной теоремы Торелли немедленно следует, что **отображение периодов** $\mathrm{Per}: \mathrm{Teich}_\eta \longrightarrow \mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ **этально** (локально диффеоморфизм).

ЗАМЕЧАНИЕ: Из Теоремы 1 следует, что любая точка $I \in \mathrm{Teich}_\eta$ такая, что $\mathrm{Pic}(M,I) = \langle\eta\rangle$ лежит в $\mathrm{Teich}_\eta^{pol}$. **Поэтому $\mathrm{Teich}_\eta^{pol}$ плотно в Teich_η.**

Пространство Тейхмюллера квартик

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\eta \in H^2(M,\mathbb{Z})$ есть целочисленный класс на К3, $(\eta,\eta) = 4$. Обозначим за Teich^q_η пространство Тейхмюллера всех $I \in \mathrm{Teich}_\eta$ таких, что линейное расслоение L на (M,I) с $c_1(L) = \eta$ обильно и глобально порождено. Пространство Teich^q_η называется **пространством Тейхмюллера квартик**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Размерность пространства Тейхмюллера всех комплексных структур равна $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Gr}_{++}(H^2(M,\mathbb{R}) = 20$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Комплексная структура I с $\operatorname{rk}\mathrm{Pic}(M,I) = 1$ лежит в Teich_η тогда и только тогда $\mathrm{Per}(I) \in \mathrm{Gr}_{++}(H^2(M,\mathbb{R})$ ортогонально η. Она лежит в Teich^q_η, если $\mathrm{Pic}(M,I)$ то есть $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Teich}^q_\eta = 19$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили отображение $\mathrm{Teich}^q_\eta \longrightarrow \mathrm{Sym}^4\,\mathbb{C}^4/GL(\mathbb{C},4)$, сюрьективное на множество гладких квартик. Поскольку **размерность пространства квартик равна размерности Teich^q_η,** в общей точке это отображение этально: **"Квартики задают дивизор в пространстве Тейхмюллера"**.

О плотности квартик

ТЕОРЕМА: (будет доказана позже)
Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M,\mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v,v) = 4$.
Тогда $\bigcup_{\eta\in\mathfrak{R}} \mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ плотно в $\mathbb{P}\mathrm{er}$.

СЛЕДСТВИЕ: $\bigcup_{\eta\in\mathfrak{R}} \mathrm{Teich}_\eta^q$ **плотно в** Teich**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В окрестности каждой точки $x \in \mathbb{P}\mathrm{er}$ лежит точка $x \in \mathbb{P}\mathrm{er}_\eta, \eta \in \mathfrak{R}$. Точки $y \in \mathbb{P}\mathrm{er}_\eta \subset \mathrm{Gr}_{++}(H^2(M,\mathbb{R}))$, такие, что $y^\perp \cap H^2(M,\mathbb{Z}) = \langle\eta\rangle$, плотны в $\mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$, а значит и в $\mathbb{P}\mathrm{er}$. В силу Теоремы 1, каждая комплексная структура с такими периодами задает квартику. Значит, квартики плотны в Teich. ■

На пространстве Тейхмюллера К3 есть плотное множество точек, соответствующих гладким квартикам.

Поскольку гладкие квартики образуют связное, гладкое семейство, они все диффеоморфны **(почему?)**.

СЛЕДСТВИЕ: Любая К3 диффеоморфна гладкой квартике.

О плотности квартик (2)

Осталось доказать:

ТЕОРЕМА: Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M,\mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v,v) = 4$. **Тогда $\bigcup_{\eta\in\mathfrak{R}} \mathbb{P}\mathrm{er}_\eta$ плотно в $\mathbb{P}\mathrm{er}$.**

Другая формулировка

Теорема 2: Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M,\mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v,v) = 4$, а $W_{\mathfrak{R}} \subset \mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$ – множество всех 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v \in \mathfrak{R}$. **Тогда $W_{\mathfrak{R}}$ плотно в $\mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы свели теорему о плотности квартик к утверждению из теории квадратичных решеток, то есть линейной алгебра и теории чисел.

На этих слайдах есть два доказательства: первое выводит плотность из сложной науки, второе руками.

Эргодические меры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – пространство с заданной на нем сигма-алгеброй A, а G – группа, действующая на M, сохраняя A. Мера μ на (M, A) называется **эргодической**, если каждое G-инвариантное измеримое подмножество $M' \subset M$ удовлетворяет $\mu(M') = 0$ либо $\mu(M \backslash M') = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **G-инвариантная мера на M эргодична тогда и только тогда, когда любая измеримая G-инвариантная функция постоянна почти всюду.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть Γ – группа, эргодически действующая на многообразии (M, μ) с мерой Лебега. Рассмотрим множество R всех $x \in M$ таких, что орбита $\Gamma \cdot x$ не плотна в M. **Тогда $\mu(R) = 0$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $U \subset M$ открыто. Тогда $\mu(U) > 0$, значит, множество $\Gamma \cdot U$ – Γ-инвариантно и измеримо. **В силу эргодичности, это множество полной меры.** Обозначим за Z_U множество $x \in M$ таких, что орбита x не пересекает U. Тогда $Z_U = M \backslash \Gamma \cdot U$ – множество меры 0.

Шаг 2: Пусть $\{U_i\}$ – база топологии в M. Тогда $R = M \backslash \bigcap Z_{U_i}$ – множество всех точек, орбиты которых не лежат в каком-то из U_i. Это счетное объединение множеств меры 0. ■

Группы Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Ли** есть гладкое многообразие, снабженное групповой структурой, таким образом, что групповые операции $x, y \longrightarrow xy$ и $x \longrightarrow x^{-1}$ суть гладкие отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Левая **мера Хаара** есть гладкая мера на группе Ли, инвариантная относительно левых сдвигов $L_x(g) = xg$.

ТЕОРЕМА: **Мера Хаара существует, и единственна с точностью до постоянного множителя.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Gamma \subset G$ – дискретная подгруппа группы G. Она называется **решеткой**, если $\mu_\Gamma(\Gamma \backslash G) < \infty$, то есть фактор G по Γ имеет конечную меру Хаара.

ТЕОРЕМА: **(Борель и Хариш-Чандра)** Пусть G – алгебраическая группа Ли над $\mathbb{Q}$, то есть группа, заданная уравнениями с рациональными коэффициентами, а $\Gamma = G_{\mathbb{Z}}$ погруппа целых точек G. Предположим, что на G нет рациональных характеров $G \longrightarrow \mathbb{R}^*$. **Тогда Γ – решетка в G.**

Теорема Мура

ТЕОРЕМА: (Кальвин Мур, 1966)
Пусть G – простая группа Ли с конечным центром, $\Gamma \subset G$ решетка, а $H \subset G$ некомпактная подгруппа. **Тогда действие Γ на G/H эргодично.**

Применим это к $\mathrm{Gr}_{++}(H^2(M)) = \frac{SO(3,19)}{SO(2)\times SO(1,19)} = G/H$. Из теоремы Мура следует, что общая $SO(H^2(M,\mathbb{Z}))$-орбита в $\mathrm{Gr}_{++}(H^2(M))$ плотна.

Пусть $W \in \mathrm{Gr}_{++}(H^2(M))$ – общая плоскость, ортогональная вектору r с $r^2 = 4$. Если ее Γ-орбита плотна в $\mathrm{Gr}_{++}(H^2(M))$, Теорема 2 следует. Поэтому для доказательства Теоремы 2 **нужно понять, какие орбиты эргодического действия $\Gamma = SO(H^2(M,\mathbb{Z}))$ на $\frac{SO(3,19)}{SO(2)\times SO(1,19)}$ плотны.**

Теорема Ратнер о замыкании орбит

ТЕОРЕМА: (теорема Ратнер о замыкании орбит) Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – подгруппа, порожденная унипотентами, а $\Gamma \subset G$ – решетка. Рассмотрим действие H на G/Γ левыми сдвигами. и пусть $H \cdot x$ – орбита H в G/Γ. **Тогда существует подгруппа S в G, содержащая H, и такая, что замыкание орбиты $H \cdot x$ равно $S \cdot x$.** Более того, S порождена унипотентами, а группа $\Gamma_S := \{\gamma \in \Gamma \mid (S \cdot x)\gamma = S \cdot x\}$ **это решетка в S** (здесь $\mathrm{St}_\Gamma(S \cdot x)$ обозначает стабилизатор орбиты $S \cdot x$ в Γ при правом действии Γ на G).

УПРАЖНЕНИЕ: Обозначим связную компоненту группы $SO(V)$ за $SO^+(V)$. Пусть $H \subset G = SO^+(H^2(M,\mathbb{R}))$ – подгруппа, тривиально действующая $W \in \mathrm{Gr}_{++}(H^2(M,\mathbb{R}))$ (эта подгруппа изоморфна $SO^+(1,19)$). Докажите, что **любая группа H_1, такая, что $H \subsetneq H_1 \subsetneq G$, изоморфна $SO^+(2,19)$,** и равна стабилизатору какого-то вектора $w \in W$.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $W \in \mathrm{Gr}_{++}(H^2(M,\mathbb{R}))$ – плоскость, не содержащая рациональных векторов. **Тогда ее $SO(H^2(M,\mathbb{Z}))$-орбита плотна в $\mathrm{Gr}_{++}(H^2(M,\mathbb{R}))$.**

СЛЕДСТВИЕ: Периоды гладких квартик с $\mathrm{Pic}(M,I) = \mathbb{Z}$ плотны в $\mathbb{P}\mathrm{er}$.

Плотные множества в $\mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$

Пусть $A \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ – подмножество. Обозначим за $V(A)$ множество 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v \in A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нуль-квадрика**, или же **световой конус** $\mathrm{Null}(M) \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ есть множество всех $l \in \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$, $(l,l) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Если $B \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ – множество предельных точек $A \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$, то $V(A)$ плотно в $V(B)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: $V(\mathrm{Null}(M)) = \mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$**.** Действительно, для каждой 2-плоскости в $H^2(M,\mathbb{R})$, в ее ортогональном дополнении есть нуль-вектор.

Объединяя эти два замечания, получаем, что Теорема 2 следует из Теоремы 3.

Теорема 2: Пусть $\mathfrak{R} \subset H^2(M,\mathbb{Z})$ – множество всех векторов v таких, что $(v,v) = 4$, а $W_{\mathfrak{R}} \subset \mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$ – множество всех 2-плоскостей, ортогональных какому-то $v \in \mathfrak{R}$. **Тогда $W_{\mathfrak{R}}$ плотно в $\mathrm{Gr}_{+,+}(H^2(M,\mathbb{R}))$.**

Теорема 3:
Множество предельных точек $\mathbb{P}\mathfrak{R} \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ содержит $\mathrm{Null}(M)$.

Плотные множества в световом конусе

Теорема 3': **Любая точка $x \in \mathrm{Null}(M) \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$ является пределом последовательности $\{\underline{x_i}\} \in \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{Z})$,** причем каждый $\underline{x_i}$ представлен $x_i \in H^2(M,\mathbb{Z})$, $(x_i, x_i) = 4$.

Доказательство. Шаг 1: Рациональные точки плотны в $\mathrm{Null}(M)$. Действительно, как минимум одна рациональная точка в $\mathrm{Null}(M)$ имеется; обозначим ее за r. Возьмем любую рациональную прямую $S \subset \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{R})$, проходящую через r. **Поскольку одна из точек пересечения $S \cap \mathrm{Null}(M)$ рациональна, другая тоже рациональна.**

Шаг 2: Вектор $v \in H^2(M,\mathbb{Z})$ называется **примитивным**, если он порождает $(\mathbb{R} \cdot v) \cap H^2(M,\mathbb{Z})$. Поскольку решетка $H^2(M,\mathbb{Z})$ унимодулярна, **для любого примитивного вектора $v \in H^2(M,\mathbb{Z})$ существует $v' \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такой, что $(v, v') = 1$.**

Шаг 3: Обозначим за $\mathfrak{S}$ множество примитивных целых нуль-векторов. В силу шага 1, $\mathbb{P}\mathfrak{S}$ плотно в $\mathrm{Null}(M)$. Пусть $v \in \mathfrak{S}$. **Осталось найти последовательность $x_i \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такую, что проективизации $\{\mathbb{P}x_i\}$ сходятся к $\mathbb{P}v$, а $(x_i, x_i) = 4$.**

Плотные множества в световом конусе (продолжение)

Шаг 3: Обозначим за $\mathfrak{S}$ множество примитивных целых нуль-векторов. В силу шага 1, $\mathbb{P}\mathfrak{S}$ плотно в $\operatorname{Null}(M)$. Пусть $v \in \mathfrak{S}$. **Осталось найти последовательность $x_i \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такую, что проективизации $\{\mathbb{P}x_i\}$ сходятся к $\mathbb{P}v$, а $(x_i,x_i)=4$.**

Шаг 4: Найдем $x \in H^2(M,\mathbb{Z})$ такой, что $(v,x)=1$, и пусть $y \in H^2(M,\mathbb{Z})$ – любой целочисленный вектор с ненулевым квадратом, ортогональный v и x. Если $u=\lambda v+x+\mu y$, то $(u,u)=2\lambda+x^2+\mu^2y^2$. Напишем $\lambda(\mu)=-1/2(x^2+\mu^2y^2-4)$. Тогда $u(\mu):=\lambda(\mu)v+x+\mu y$ – целочисленный вектор (форма пересечения четна), причем $(u(\mu),u(\mu))=4$. **Осталось доказать, что $\lim\limits_{\mu \longrightarrow \infty}\mathbb{P}u(\mu)=\mathbb{P}v$.**

Шаг 5: Выберем на $H^2(M,\mathbb{R})$ положительно-определенную метрику g, таким образом, что $g(x,x)=g(y,y)=x(v,v)=1$, обозначим за $|\cdot|$ соответствующую норму, $|z|:=g(z,z)^{1/2}$. Тогда $|u(\mu)-\lambda(\mu)v|\leqslant 1+|\mu|$, а $|\lambda(\mu)v|\geqslant|1/2\mu^2y^2|-x^2-4$. Получается, что со стремлением μ к бесконечности, в треугольнике $0,u(\mu),\lambda(\mu)v$ сторона $(0,\lambda(\mu)v)$ растет квадратично по μ, сторона $(u(\mu),\lambda(\mu)v)$ линейно, соответственно, **угол между противолежащими к $(u(\mu),\lambda(\mu)v)$ сторонами стремится к нулю.** Мы доказали, что $\mathbb{P}v$ получено как предел целочисленных $\mathbb{P}u(\mu)$, удовлетворяющих $(u(\mu),u(\mu))=4$. ∎