

# КЗ на Фонтанке,

лекция 4: формула Римана-Роха и теорема Лефшеца

Миша Вербицкий

Первая летняя математическая школа на Фонтанке: Геометрия 2017

7 июля 2017

## Классы Черна (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Классы Черна** суть классы  $c_i(B) \in H^{2i}(B)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , определенные для любого векторного расслоения  $B$  на клеточном пространстве  $X$ , и удовлетворяющие следующим аксиомам.

1.  $c_0(V) = 1$ .

2. **функториальность:** если  $f : X \longrightarrow Y$  непрерывно, то  $f^*c_i(B) = c_i(f^*B)$ .

3. **Формула Уитни:**  $c_*(B \oplus B') = c_*(B)c_*(B')$ , где  $c_*(B) = \sum_i c_i(B)$  ("**тотальный класс Черна**")

4. Если  $\mathcal{O}(i)$  – стандартное расслоение на проективном пространстве, то  $c_1(\mathcal{O}(1)) = [H]$ , где  $[H]$  – фундаментальный класс гиперплоскости, а для всех  $i > 0$ ,  $c_i(\mathcal{O}(1)) = 0$ .

## Когерентные пучки

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $M$  – комплексное многообразие,  $\mathcal{O}_M$  – структурный пучок (пучок голоморфных функций). **Когерентный пучок** на комплексном многообразии  $\mathcal{O}_M$  есть пучок  $\mathcal{O}_M$ -модулей, локально изоморфный фактору свободного пучка  $\mathcal{O}_M^n$  по конечно-порожденному  $\mathcal{O}_M$ -подмодулю. Когда  $M$  проективно, определение когерентных пучков такое же, но "локально" означает "локально в топологии Зариского". **Из принципа GAGA Серра следует, что эти два определения эквивалентны.**

**УПРАЖНЕНИЕ:** Пусть  $M$  – проективное многообразие. Докажите, что для когерентных пучков определены классы Черна, которые функториальны и удовлетворяют аксиоме Уитни.

## Когерентные пучки и резольвенты

**УПРАЖНЕНИЕ:** Пусть  $X \hookrightarrow Y$  – комплексное подмногообразие. **Докажите, что когерентные пучки на  $X$  можно интерпретировать как когерентные пучки на  $Y$  с носителем в  $X$ .**

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Пусть  $F$  – градуированный модуль над градуированным кольцом  $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_{n-1}]$  однородных полиномов. Однородные полиномы задают функции на стандартных картах  $\mathbb{C}P^n$ , значит,  **$F$  задает когерентный пучок на  $\mathbb{C}P^n$ .**

**УПРАЖНЕНИЕ:** Докажите, что **любой когерентный пучок получается таким образом.**

**УПРАЖНЕНИЕ:** Докажите, что **любой когерентный пучок  $F$  на  $\mathbb{C}P^n$  имеет резольвенту вида  $0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$ , где все  $F_i$  получаются как прямые суммы линейных расслоений.**

**УКАЗАНИЕ:** Это будет свободная резольвента градуированного модуля над градуированным кольцом  $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_{n-1}]$ .

## Очень обильные расслоения

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $X \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$  – проективное многообразие, а  $\mathcal{O}(1)$  расслоение, заданное линейными функционалами на  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Обозначим за  $\mathcal{O}(p)$   $p$ -ю тензорную степень  $\mathcal{O}(1)$ . Ограничение  $\mathcal{O}(p)$  на  $X$  называется **очень обильным расслоением**., **Обильное расслоение** – линейное расслоение, положительная степень которого очень обильна.

**УПРАЖНЕНИЕ:** Докажите, что **очень обильное расслоение глобально порождено**.

**УПРАЖНЕНИЕ:** Пусть  $L$  очень обильно, а  $F$  – когерентный пучок. **Докажите, что  $F \otimes L^N$  глобально порождено для достаточно большого  $N > 0$ .**

**УПРАЖНЕНИЕ:** Пусть  $L$  очень обильно, а  $F$  – когерентный пучок. **Докажите, что  $H^i(F \otimes L^N) = 0$  для достаточно большого  $N$  и любого  $i > 0$ .**

## $K$ -группа и классы Черна

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $X$  – алгебраическое многообразие. Обозначим за  $K(X)$  группу, порожденную классами изоморфизма  $[F]$  когерентных пучков  $F$  на  $X$ , и заданную соотношениями вида  $[F_1] + [F_3] = [F_2]$  для каждой точной последовательности  $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_3 \longrightarrow 0$ . Эта группа называется  **$K$ -группой Гротендика** (и еще иногда  $K_0$ ).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $F_0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow \dots$  – комплекс когерентных пучков. Соответствующий класс в  $K(X)$  обозначается за  $[F_*] := \sum_i (-1)^i [F_i]$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если  $X$  гладко, любой когерентный пучок на  $X$  имеет конечную резольвенту из векторных расслоений, то есть локально тривиальных пучков (докажите это). **Поэтому в качестве образующих  $K(X)$  можно брать комплексы векторных расслоений, а в качестве соотношений – точные последовательности комплексов.**

## Эйлерова характеристика когерентного пучка

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Эйлерова характеристика когерентного пучка  $F$  есть число  $\chi(F) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(F)$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Для любой точной последовательности пучков  $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_3 \longrightarrow 0$ , имеем  $\chi(F_2) = \chi(F_1) + \chi(F_3)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Проверьте самостоятельно (примените длинную точную последовательность когомологий). ■

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Таким образом,  $\chi$  задает гомоморфизм  $K(X) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}$ .

## Теорема Римана-Роха-Хирцебруха

**ТЕОРЕМА: (Римана-Роха-Хирцебруха)** Пусть  $F$  – когерентный пучок на гладком компактном многообразии. **Тогда  $\chi(F)$  зависит только от классов Черна  $c_*(F)$ , и выражается через них следующим образом:**

$$\chi(F) = \int_X ch_*(F) \wedge td_*(TX),$$

где  $td_*(TX)$  обозначает **тотальный класс Тодда** касательного расслоения  $TX$ ,

$$td_* = 1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_1^2 + c_2}{12} + \frac{c_1 c_2}{24} + \frac{-c_1^4 + 4c_1^2 c_2 + c_1 c_3 + 3c_2^2 - c_4}{720} + \dots$$

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Формально **класс Тодда можно определить следующим образом:** он удовлетворяет формуле Уитни  $td_*(B \oplus B') = td_*(B)td_*(B')$ , а для линейного расслоения  $L$  с  $c_1(L) = \alpha$ , имеем  $td_*(L) = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}$ .

## Доказательство теоремы Римана-Роха для кривых

### ТЕОРЕМА: (Риман-Рох для кривых):

Пусть  $F$  – когерентный пучок на кривой. Тогда

$$\chi(F) = c_1(F) + \operatorname{rk}(F)(1 - g).$$

**Доказательство. Шаг 1:** Поскольку группа  $K(X)$  порождена линейными расслоениями, **достаточно проверить формулу для линейного расслоения  $L$** . В самом деле, любой когерентный пучок имеет резольвенту из линейных расслоений степени  $-d \ll 0$  (проверьте это). Можно также выбрать эти  $L$  таким образом, что пучок  $L^*$  порожден глобальными сечениями. **Чтобы убедиться в этом, надо вложить  $X$  в  $\mathbb{C}P^n$ , и построить такую резольвенту для когерентного пучка на  $\mathbb{C}P^n$ .**

**Шаг 2:** Пусть  $l$  – сечение  $L^*$ , а  $0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow C \longrightarrow 0$  – соответствующая точная последовательность. **В  $K$ -группе пучок кручения  $C$  эквивалентен прямой сумме пучков-небоскребов  $\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x$ , сосредоточенных в его носителе.**

**Шаг 3: Осталось доказать Римана-Роха для  $\mathcal{O}_X$  и для пучков-небоскребов.** Для  $\mathcal{O}_X$   $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - g$  по определению  $g = \dim H^1(\mathcal{O}_X)$ . Для пучков-небоскребов,  $\chi(F) = 1 = c_1(F)$ . ■

## Римана-Рох-Хирцебрух для поверхностей (слабая версия)

**ЗАМЕЧАНИЕ:** В следующем утверждении и его доказательстве,  $c_1(L)$  для линейных расслоений обозначается буквой  $L$ , а фундаментальный класс дивизора  $D$  обозначается  $D$ . Форма пересечения в  $H^2(X)$  обозначается  $(A, B)$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ: (Риман-Рох-Хирцебрух для линейных расслоений на поверхности; слабая версия):** Пусть  $L$  – линейное расслоение на поверхности  $X$ . Тогда

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{(L - K_X, L)}{2}, \quad (*)$$

где  $K_X = \Omega^2 X$  есть каноническое расслоение, а  $(A, B)$  обозначает форму пересечения, примененную к классам Черна.

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть  $0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_2|_D \rightarrow 0$  – точная последовательность, где  $L_i$  – линейные расслоения, а  $D$  – гладкая кривая рода  $g$ . **В силу РР для кривых, имеем**  $\chi(L_1) = \chi(L_2) + (L_2, D) + (1 - g)$

**Шаг 2:** По формуле присоединения,  $K_D = K_X|_D \otimes ND$ , где  $ND$  есть нормальное расслоение. С другой стороны,  $g - 1 = \deg K_D/2$ . Это дает  $1 - g = -(K_X + D, D)/2$ .

## Римана-Рох-Хирцебрух для поверхностей (продолжение)

**Шаг 3:** Обозначим за  $\chi'(L)$  правую часть формулы (\*),  $\chi'(L) := \chi(\mathcal{O}_X) + (L - K_X, L)/2$ . В условиях шага 1, имеем  $c_1(L_2) = c_1(L_1) + D$ , что дает

$$\chi'(L_2) - \chi'(L_1) = \frac{1}{2} \left[ (L_2 - K_X, L_2) - (L_2 - K_X - D, L_2 - D) \right] = (L_2, D) - (K_X + D, D)/2.$$

**Шаг 4:** Сравнивая утверждения шага 2 и шага 3, получаем  $\chi'(L_2) - \chi'(L_1) = \chi(L_2) - \chi(L_1)$ . Значит, **РРХ для  $L_2$  равносильно ему же для  $L_1$ .**

**Шаг 5:** Для каждого обильного расслоения  $A$ ,  $L \otimes A^{\otimes N}$  имеет гладкие сечения для  $N \gg 0$ , что дает точную последовательность  $0 \rightarrow L \rightarrow L \otimes A^{\otimes N+1} \rightarrow L \otimes A^{\otimes N+1}|_D \rightarrow 0$ . Значит, **достаточно доказать (\*) для расслоения  $L \otimes A^{\otimes N+1}$ , которое можно считать очень обильным.**

**Шаг 6:** Для очень обильных расслоений  $L$ , имеем  $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow L \rightarrow L|_D \rightarrow 0$ , где  $D$  – множество нулей общего сечения  $L$ . Поскольку  $D$  гладко, а (\*) верна для  $\mathcal{O}_X$ , **получаем (\*) для  $L$ . ■**

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Формула Римана-Роха-Хирцебруха для поверхностей следует из (\*) и **формулы Нетера**:  $\chi(\mathcal{O}_X) = (c_1(X)^2 - c_2(X))/12$ , но ее я доказывать не буду.

## КЗ-поверхности (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** КЗ-поверхность есть комплексная поверхность с  $b_1 = 0$  и  $c_1 = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Все поверхности с  $b_1 = 0$  - кэлеровы (Бухдаль-Ламари).

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Каноническое расслоение  $K_M$  тривиально.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Теорема Римана-Роха дает  $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$ , значит,  $c_2(M) = 24$ . Поскольку  $c_2(M)$  есть эйлерова характеристика  $M$ , получаем  $b_2(M) = 22$ .

Это дает ромб Ходжа для КЗ-поверхности:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 0 & & 0 & \\
 1 & & 20 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 1 & & \\
 & & 12 & & 
 \end{array}$$

## Классификация форм пересечения (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Симметричная билинейная форма  $\eta$  на  $V := \mathbb{Z}^n$  называется **унимодулярной**, если она задает изоморфизм  $V \rightarrow V^*$ , **четной**, если множество всех  $\eta(x, x)$  содержится в  $2 \cdot \mathbb{Z}$ , и **нечетной** если нет.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Симметричная 2-форма  $\eta$  называется **неопределенной**, если  $\eta(x, x) < 0$  и  $\eta(y, y) > 0$  для каких-то  $x$  и  $y$ .

### ТЕОРЕМА:

**(классификация унимодулярных симметричных билинейных форм):**

Пусть  $q$  — четная унимодулярная неопределенная форма на  $V$ . **Тогда**  $(V, q)$  **разлагается в ортогональную прямую сумму** подпространств с билинейной формой, которая имеет вид  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  (такие пространства называются "гиперболическими"), и подпространств  $E_{\pm 8}$ , изоморфных решетке пересечения корней алгебры  $E_8$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

или такой же решетке с формой пересечения противоположного знака.

## Экспоненциальная точная последовательность

Из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0,$$

получаем точную последовательность

$$H^1(\mathcal{O}_M) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_M^*) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^2(\mathcal{O}_M).$$

Группа  $H^2(\mathcal{O}_M)$  отождествляется с  $H^{0,2}(M)$ , значит, ядро отображения  $\alpha$  это  $H^2(M, \mathbb{Z}) \cap \ker \alpha = H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$ .

Мы доказали предложение

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ:** Множество первых классов Черна голоморфных линейных расслоений на кэлеровом многообразии это  $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$ .

## Форма пересечения для КЗ-поверхности

**ЛЕММА:** Пусть  $\eta$  – нечетная форма пересечения на  $V := \mathbb{Z}^n$ , а  $P := \mathbb{P}(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$  – соответствующее проективное пространство. Обозначим за  $R$  множество нечетных векторов  $r \in V$ . Тогда образ  $\pi(R)$  в  $P$  плотен.

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть  $s \in V$  – любой вектор. Для доказательства плотности  $R$  в  $P$  достаточно найти элемент из  $\pi(R)$  в любой окрестности  $\pi(s)$ .

**Шаг 2:** Пусть  $r_0 \in R$ . Последовательность  $r_0 + 2Ns$  состоит из нечетных векторов, а ее образ в  $P$  сходится к  $s$ . ■

**ТЕОРЕМА:** Форма пересечения КЗ-поверхности  $M$  четная.

**Доказательство. Шаг 1:** В силу доказанного на прошлой лекции, множество  $K$  кэлеровых форм  $M$  (для всех комплексных структур) открыто в  $H^2(M, \mathbb{R})$ . Значит, его проективизация  $\mathbb{P}K$  открыта в  $\mathbb{P}H^2(M, \mathbb{R})$ .

**Шаг 2:** Если форма пересечения  $H^2(M, \mathbb{Z})$  нечетна, в силу предыдущей леммы, найдется нечетный целочисленный класс  $r$  с  $\pi(r) \in \mathbb{P}K$ . Тогда  $r \in H^{1,1}(M, \mathbb{Z})$ , значит, существует голоморфное расслоение  $L$  с  $c_1(L) = r$ . Но  $\chi(L) = 2 + \frac{1}{2} \int_M r \wedge r$  по формуле Римана-Роха. Значит, самопересечение  $r$  четно. ■

## Гладкие квартики

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Гладкой квартикой называется гладкая гиперповерхность в  $\mathbb{C}P^n$ , заданная неприводимым однородным полиномом степени 4.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** По формуле Эйлера, каноническое расслоение на  $\mathbb{C}P^n$  есть  $\mathcal{O}(-n-1)$ . Формула присоединения, примененная к гладкой поверхности  $Z \subset \mathbb{C}P^n$  степени  $m$ , дает  $N^*Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} K_Z = K_{\mathbb{C}P^n}|_Z$ , а коль скоро  $N^*Z = \mathcal{O}(-m)$  и  $K_{\mathbb{C}P^n} = \mathcal{O}(-n-1)$ , **имеем**  $K_Z = \mathcal{O}(m-n-1)$ .

**СЛЕДСТВИЕ:** Гладкая квартика в  $\mathbb{C}P^3$  есть поверхность с тривиальным каноническим расслоением.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** В дальнейшем, говоря про "гладкие квартики", **я буду подразумевать квартики размерности 2.**

## Гладкие кватрики и теорема Лефшеца о гиперплоском сечении

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:**  $k$ -е вложение Веронезе есть проективное вложение  $\mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(k)))$ , заданное линейной системой  $\mathcal{O}(k)$ . Иначе говоря, вложение Веронезе переводит  $(t_0 : t_1 : \dots : t_n)$  в  $(P_0(t_0, \dots, t_n) : P_1(t_0, \dots, t_n) : \dots : \dots)$ , где  $P_i$  обозначает какой-то базис в однородных многочленах степени  $k$ .

**СЛЕДСТВИЕ:** Гладкая кватрика есть пересечение образа 4-го отображения Веронезе и общей гиперплоскости.

### ТЕОРЕМА: (Лефшеца о гиперплоском сечении)

Пусть  $Z \subset \mathbb{C}P^n$  – гладкое, проективное многообразие размерности  $m$ , а  $H \subset \mathbb{C}P^n$  – гиперплоское сечение, трансверсально пересекающее  $Z$ . Тогда для любого  $i < m - 1$ , отображение гомотопических групп  $\pi_i(Z \cap H) \rightarrow \pi_i(Z)$  – изоморфизм.

Доказательство см. ниже.

**СЛЕДСТВИЕ:** Гладкая двумерная кватрика является КЗ-поверхностью.

В самом деле,  $\pi_1(Z) = \pi_1(\mathbb{C}P^3) = 0$  по теореме Лефшеца, примененной к образу Веронезе.

## Скрученный дифференциал $d^c$ (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $(M, I)$  – комплексное многообразие,  $I : TM \rightarrow TM$  – оператор комплексной структуры,  $I^2 = -\text{Id}_{TM}$ . **скрученный дифференциал**  $d^c$  определяется формулой  $d^c := I^{-1}dI$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $(M, I)$  – комплексное многообразие. Тогда  $\partial := \frac{d + \sqrt{-1}d^c}{2}$ ,  $\bar{\partial} := \frac{d - \sqrt{-1}d^c}{2}$  – компоненты в разложении Ходжа  $d$ :  $\partial = d^{1,0}$ ,  $\bar{\partial} = d^{0,1}$ .

**ТЕОРЕМА:** Пусть  $(M, I)$  – почти комплексное многообразие. Тогда следующие утверждения равносильны:

1.  $I$  интегрируемо.
2.  $\partial^2 = 0$ .
3.  $\bar{\partial}^2 = 0$ .
4.  $dd^c = -d^cd$
5.  $dd^c = 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}$ .

## Плюрисубгармонические функции Морса

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Если на многообразии  $M$  заданы координаты  $x_1, \dots, x_{2n}$ , можно определить **гессиан** функции  $f \in C^\infty M$ :  $\text{Hess}(f) = \sum_i \frac{d^2 f}{dx_i dx_j} \cdot dx_i \otimes dx_j \in \text{Sym}^2 M$ . **В точках, где  $df = 0$ , гессиан не зависит от выбора координат (проверьте это).** Функция  $f$  называется **морсовской**, если во всех ее критических точках,  $\text{Hess}(f)$  – невырожденная билинейная симметрическая форма. **Индекс** критической точки  $z$  есть количество отрицательных собственных значений у  $\text{Hess}(f)|_{T_z M}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Функция  $f$  на комплексном многообразии  $M$  называется **плюрисубгармонической**, если  $dd^c f$  есть положительная  $(1,1)$ -форма, то есть  $dd^c f(x, Ix) \geq 0$  для любого  $x \in TM$ , и **строго плюрисубгармонической**, если  $dd^c f(x, Ix) > 0$  для любого ненулевого  $x \in TM$ .

**ПРИМЕР:**  $f = |z|^2$  строго плюрисубгармонична на  $\mathbb{C}^n$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $f$  – строго плюрисубгармоническая функция Морса на  $n$ -мерном многообразии. **Тогда индекс критических точек  $f$  не превосходит  $n$ .**

*Доказательство см. следующий слайд.*

## Плюрисубгармонические функции Морса (продолжение)

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть  $f$  – строго плюрисубгармоническая функция Морса на  $n$ -мерном многообразии. **Тогда индекс критических точек  $f$  не превосходит  $n$**

**Доказательство. Шаг 1:** Поскольку  $dd^c f = 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}f$  –  $(1,1)$ -форма, она  $I$ -инвариантна:  $dd^c f(Ix, Iy) = dd^c f(x, y)$ . Значит,  $dd^c f(Ix, y) = dd^c f(I^2x, Iy) = -dd^c(x, Iy)f = dd^c(Iy, x)f$ . Мы получили, что **форма  $\text{Hess}_c(f) := dd^c f(x, Iy)$  симметрическая**. Эта форма называется **комплексный гессиан**. Для плюрисубгармонических функций, она неотрицательно определена.

**Шаг 2:** Пусть координаты  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$  на  $M$  таковы, что  $I(dx_i) = dy_i$ , а  $I(dy_i) = -dx_i$ . Тогда

$$dd^c(f) = \sum_i dx_i \wedge dy_i \left( \frac{d^2 f}{dx_i^2} + \frac{d^2 f}{dy_i^2} \right),$$

что дает

$$\text{Hess}_c(f) = \sum_i \left( \frac{d^2 f}{dx_i^2} + \frac{d^2 f}{dy_i^2} \right) [dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i]$$

**Мы получили  $\text{Hess}_c(f) = \text{Hess}(f) + I \text{Hess}(f)$ .**

## Плюрисубгармонические функции Морса (окончание)

**Мы получили  $\text{Hess}_c(f) = \text{Hess}(f) + I \text{Hess}(f)$ .**

**Шаг 3:** Для любой строго плюрисубгармонической функции Морса, все собственные значения ее комплексного гессиана положительны. Пусть  $m$  – критическая точка  $f$ , а  $dz_1, \dots, dz_{2n} \in T_m M$  – базис, в котором  $\text{Hess}(f)$  и  $I \text{Hess}(f)$  ортогональны. Такой базис существует для любой пары билинейных симметрических форм, если одна из них положительно определена; **проверьте это**, и примените к паре форм  $\text{Hess}_c(f)$ ,  $\text{Hess}(f)$ .

**Шаг 4:** Пусть  $\text{Hess}(f)(dz_i, dz_i) = \alpha_i$ , а  $\text{Hess}(f)(dz_i, dz_i) = \beta_i$ . Поскольку формы  $\text{Hess}(f)$ ,  $I \text{Hess}(f)$  сопряжены, у них одинаковая сигнатура. Тогда  $\text{Hess}_c(f)(dz_i, dz_i) = \alpha_i + \beta_i$ . Поскольку форма  $\text{Hess}_c(f) = \text{Hess}(f) + I \text{Hess}(f)$  положительно определена,  $\alpha_i + \beta_i > 0$ , то есть **как минимум половина  $\alpha_i$  неотрицательна.** ■

## Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть  $f$  – функция Морса на гладком многообразии  $M$ , а  $\text{grad } f$  ее градиентное векторное поле. **Стабильное многообразие** критической точки  $m$  есть все точки  $z \in M$  такие, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t \text{grad } f} z = m$ .

**УПРАЖНЕНИЕ:** Пусть  $Z_m$  – стабильное многообразие критической точки  $m$  индекса  $p$ . **Докажите, что  $Z_m$  гладкое,  $p$ -мерное подмногообразие в  $M$ .**

## ТЕОРЕМА: (Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении)

Пусть  $Z \subset \mathbb{C}P^n$  – гладкое, проективное многообразие размерности  $m$ , а  $H \subset \mathbb{C}P^n$  – гиперплоское сечение, трансверсально пересекающее  $Z$ . Тогда **для любого  $i < m - 1$ , отображение гомотопических групп  $\pi_i(Z \cap H) \rightarrow \pi_i(Z)$  – изоморфизм.**

**Доказательство. Шаг 1:** Рассмотрим функцию  $f := |z|^2$  на  $\mathbb{C}P^n \setminus H = \mathbb{C}^n$ , пошевелим ее таким образом, чтобы она оставалось плюрисубгармоничной, но стала морсовской на  $Z \setminus (H \cap Z)$  **(докажите, что это возможно)**.

## Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении (продолжение)

**Шаг 2:** Пусть  $S_i \subset Z \setminus (H \cap Z)$  – стабильные множества всех критических точек  $f$  на  $Z$ . Тогда  $Z \cap H$  является деформационным ретрактом  $Z_0 := Z \setminus \bigcup_i S_i$ . Для доказательства сего, рассмотрим отображение  $z \rightarrow e^{-t} \operatorname{grad} f$ , и устремим  $t$  к бесконечности; для любого  $z \in Z_0$ , **предел лежит на  $Z \cap H$ , и непрерывно зависит от  $t \in [0, \infty]$  и  $z$ .**

**Шаг 3:** Поскольку  $f$  плюрисубгармонична, индекс критических точек  $f$  не превосходит  $n$ . Значит,  $\dim S_i \leq n$ . В силу предыдущего шага,  $Z_0$  гомотопически эквивалентно  $H \cap Z$ . Теперь **теорема Лефшеца вытекает из следующей топологической леммы.**

**ЛЕММА:** Пусть  $Z$  – гладкое многообразие, а  $S_i$  – набор гладких подмногообразий в  $Z$ ,  $\operatorname{codim} \dim S_i \geq n$ . Обозначим за  $Z_0$  дополнение  $Z_0 := Z \setminus \bigcup_i S_i$ . Тогда естественное вложение  $Z_0 \rightarrow Z$  **индуцирует изоморфизм гомотопических групп  $\pi_i(Z_0) \cong \pi_i(Z)$  для всех  $i < n - 1$ , и сюръективно для  $i = n - 1$ .**

## Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении (окончание)

**ЛЕММА:** Пусть  $Z$  – гладкое многообразие, а  $S_i$  – набор гладких подмногообразий в  $Z$ ,  $\text{codim dim } S_i \geq n$ . Обозначим за  $Z_0$  дополнение  $Z_0 := Z \setminus \bigcup_i S_i$ . Тогда естественное вложение  $Z_0 \rightarrow Z$  **индуцирует изоморфизм гомотопических групп**  $\pi_i(Z_0) \cong \pi_i(Z)$  для всех  $i < n - 1$ , и сюръективно для  $i = n - 1$ .

**Доказательство. Шаг 1:** Чтобы убедиться, что  $\pi_i(Z_0) \xrightarrow{j} \pi_i(Z)$  сюръективно, возьмем какой-то элемент в  $\pi_i(Z)$ , **представим его иммерсией сферы  $\Sigma^i \rightarrow Z$  и продеформируем эту сферу, чтобы она стала трансверсальна к  $S_i$** . Это можно сделать, когда  $i < \text{codim}_M S_i \leq n - 1$ . Поскольку  $\Sigma^i \subset Z_0$ , ее класс в  $\pi_i(Z)$  лежит в образе  $j$ .

**Шаг 2:** Пусть  $\Sigma^i \rightarrow Z_0$  – отображение сферы, гомотопное нулю в  $Z$ . **Гомотопию можно изобразить как отображение из  $i+1$ -мерного шара  $B^{i+1}$  в  $Z$ , граница которого переходит на  $\Sigma^i$** . И сферу и гомотопию можно выбрать гладкой, потом пошевелить, чтобы образ  $B^{i+1}$  пересекал  $S_i$  трансверсально. Поэтому, если  $i + 1 < \text{codim } S_i \geq n$ , образ шара не будет пересекать  $S_i$ , что дает гомотопию образа  $\Sigma^i$  в точку внутри  $Z_0$ . ■.