К3 поверхность 4: теорема Лефшеца

Задача 4.1. Пусть $Z \subset \mathbb{C}P^n$ гладкое проективное многообразие, трансверсальное гиперплоскости H, а $A = Z \backslash Z \cap H$. Рассмотрим A как подмногообразие в $\mathbb{C}P^n \backslash H$, с обычной метрикой на $\mathbb{C}^n$, и пусть $f := |z|^2$ – функция модуля на $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим градиентный поток $e^{t\,\mathsf{grad}\, f}$. Обозначим за $\{S_i^f\}$ множество всех стабильных многообразий всех критических точек f. Докажите, что $\Psi_f(a) := \lim\limits_{t \longrightarrow \infty} e^{t\,\mathsf{grad}\, f} a$ определен для каждой точки $a \in A$, и задает непрерывное отображение $A \backslash (\bigcup S_i^f) \times [0, t] \longrightarrow Z$.

Задача 4.2. Пусть M – риманово многообразие. Рассмотрим метрику C^2 на $C^\infty M$, $|f|_{C^2} := \sup_M (|f| + |df| + |\nabla df|)$. В условиях предыдущей задачи, снабдим A метрикой, которая получена ограничением обычной метрики на $\mathbb{C}^n$. Докажите, что для любой функции f_1 такой, что $|f - f_1|_{C^2} < C$, отображение $\Psi_{f_1} := \lim\limits_{t \longrightarrow \infty} e^{t\,\mathsf{grad}\, f} a : \ A \backslash (\bigcup S_i^{f_1}) \longrightarrow Z$ непрерывно вне стабильных многообразий f_1.

Задача 4.3. В условиях предыдущей задачи, предположим, что у f и f_1 нет критических точек положительного индекса. Докажите, что отображения Ψ_f и Ψ_{f_1} равны в их области определения.

Задача 4.4. Пусть f – дважды дифференцируемая функция на римановом многообразии, а $B_f(\varepsilon)$ – ε-шар вокруг f в метрике, заданной $|\cdot|_{C^2}$. Докажите, что для открытого, плотного подмножества $U \subset B_f(\varepsilon)$, все функции $f_1 \in U$ морсовские.

Задача 4.5. Пусть Z_m – стабильное многообразие критической точки m индекса p. Докажите, что Z_m гладкое, p-мерное подмногообразие в M.

Задача 4.6. Пусть (M, I, J, K) полное, гиперкэлерово многообразие вещественной размерности 4, $N > 0$ константа, $z_1 \in M$ отмеченная точка, а f – положительная функция на M такая, что $|df|\big|_z < d(z, z_0)^N$. Предположим, что f строго плюрисубгармонична относительно I, J, K (строго - значит, что $dd^c(x, Ix) > \varepsilon |x|^2$ для какой-то функции $\varepsilon : \ M \longrightarrow R^{>0}$ и всех $x \in TM$). Докажите, что $\pi_1(M)$ – свободная группа.

Задача 4.7. В условиях предыдущей задачи, приведите пример, когда $\pi_1(M)$ нетривиальна.

Задача 4.8. Пусть $S \subset \mathbb{C}^n$ замкнутое, гладкое, голоморфное подмногообразие. Докажите, что $H^i(S) = 0$ для всех $i > \dim S$.

Задача 4.9. Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, а $\phi : \ M \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ морсовская функция, такая, что $dId\phi(x, Ix) \geqslant 0$ для любого $x \in TM$. Докажите, что $H^i(M) = 0$ для всех $i > \dim M$.