К3 на Фонтанке,

лекция 3: локальная теорема Торелли

Миша Вербицкий

Первая летняя математическая школа на Фонтанке: Геометрия 2017

5 июля 2017

Пространства Фреше

Определение: Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}$. Функция $\nu : V \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ называется **полунормой** на V, если имеет место следующее
(*) **Неравенство треугольника:** $\nu(v+v') \leqslant \nu(v) + \nu(v')$.
(**) **Инвариантность относительно гомотетии:** $\nu(\lambda v) = |\lambda|\nu(v)$.
Векторное пространство с полунормой наделено **полуметрикой,** по формуле $d(x,y) = \nu(x-y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $(V, \{\nu_\alpha\})$ – пространство, снабженное системой полунорм. Последовательность x_i **сходится к x в этой системе полунорм**, если $\lim_i \nu_\alpha(x_i - x) = 0$ для всех полунорм ν_α. Говорится, что $(M, \{d_\alpha\})$ **полно**, если **каждая последовательность Коши имеет предел в топологии, заданной полуметриками.**

Определение: Пусть V – топологическое векторное пространство с хаусдорфовой топологией. V называется **пространством Фреше**, когда топология на V может быть задана полной, счетной системой полунорм $\{\nu_\alpha\}$.

Пространство гладких функций на отрезке

Определение: Пусть $C^\infty([0,1])$ – пространство гладких функций на отрезке. Рассмотрим, для каждого n, норму $|f|_{C^n}$, определенную следующим образом:

$$|f|_{C^0} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad |f|_{C^1} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + |f'(x)|, \quad ...,$$

$$|f|_{C^n} := \sup_{x\in[0,1]} \sum_{i=0}^{n} |f^{(i)}(x)|.$$

Утверждение:
$C^\infty([0,1])$ с такой системой полунорм – пространство Фреше.

Доказательство: Поскольку

$$|\varphi|_{C^n} \geqslant \left|\varphi^{(k)}\right|_{C^{n-k}},$$

для любой последовательности Коши $\{f_i\}$, $\{f_i^{(k)}\}$ – тоже последовательность Коши. Предел последовательности $\{f_i\}$ будет k-кратной первообразной для предела $\{f_i^{(k)}\}$, значит, предел $\{f_i\}$ – гладкий. ■

Многообразия Фреше

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Многообразие Фреше** есть топологическое пространство, снабженное атласом $\{U_i\}$, где каждая из карт U_i реализована как открытое подмножество в каком-то пространстве Фреше, а все функции перехода гладкие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гладкое отображение** многообразий Фреше - такое, которое задается гладкими отображениями в каждой из карт.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа Ли-Фреше** есть группа, снабженная структурой многообразия Фреше, таким образом, что все групповые операции являются гладкими.

ЗАМЕЧАНИЕ: Заменив "Фреше" на "банаховы", получим определение **банахова многообразия** и **банаховой группы Ли**.

Пространство Тейхмюллера

ЗАМЕЧАНИЕ: Отныне и до конца лекции, **многообразие M предполагается компактным.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\operatorname{Diff}_0(M)$ – связная компонента группы диффеоморфизмов, а Symp – многообразие Фреше всех симплектических форм на M. **Пространство Тейхмюллера** Teich_s **симплектических форм на M** есть фактор $\operatorname{Teich}_s := \operatorname{Symp} / \operatorname{Diff}_0(M)$, с индуцированной топологией.

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогичным образом определяется пространство Тейхмюллера комплексных структур, эрмитовых, кэлеровых, гиперкэлеровых и так далее.

Теорема Мозера и отображение периодов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathsf{Diff}_0(M)$ – связная компонента группы диффеоморфизмов, а Symp – многообразие Фреше всех симплектических форм на M. **Пространство Тейхмюллера** Teich_s **симплектических форм на** M есть фактор $\mathsf{Teich}_s := \mathsf{Symp}/\mathsf{Diff}_0(M)$, с индуцированной топологией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение периодов $\mathsf{Teich}_s \xrightarrow{\mathsf{Per}} H^2(M,\mathbb{R})$ переводит симплектическую форму ω в ее класс когомологий $[\omega]$.

ТЕОРЕМА: (Мозер) Пусть – компактное симплектическое многообразие, а Teich_s – симплектическое пространство Тейхмюллера. В какой-то окрестности $U \subset \mathsf{Teich}_s$ каждой точки $x \in \mathsf{Teich}_s$, **отображение периодов** $\mathsf{Teich}_s \longrightarrow H^2(M,\mathbb{R})$ **– гомеоморфизм** U **на его образ.**

Пусть Symp_ω – множество всех симплектических структур на M, класс когомологий которых равен $[\omega]$. Для доказательства теоремы Мозера **достаточно проверить, что** $\mathsf{Diff}_0(M)$ **действует транзитивно на** Symp_ω **в какой-то окрестности** ω**.**

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, вариант 2)
Пусть Symp^0_ω – связная компонента Symp_ω. **Тогда** $\mathsf{Diff}_0(M)$ **действует транзитивно на** Symp^0_ω

Теорема Мозера и локальная связность

Поскольку Symp_ω – открытая часть линейного пространства, Symp_ω локально линейно связно.

Поэтому **теорема Мозера следует из следующей теоремы.**

ТЕОРЕМА: (теорема Мозера, канонический вариант)
Пусть ω_t – семейство симплектических форм на M, гладко зависящих от параметра t. Предположим, что все ω_t когомологичны. **Тогда найдется диффеоморфизм $\Psi_t \in \mathrm{Diff}_0(M)$, такой, что $\Psi_t^* \omega_0 = \omega_t$.**

Доказательство: Мы построим Ψ_t как решение уравнения $\frac{d\Psi_t}{dt} = X_t$, где $X_t \in TM$ – векторное поле, зависящее от параметра t.

Шаг 1: Поскольку ω_t все когомологичны, форма $\frac{d\omega_t}{dt}$ точна. Значит, $\frac{d\omega_t}{dt} = d\eta_t$, где $\eta_t \in \Lambda^1(M)$. Пусть X_t – векторное поле, такое, что $\omega_t \lrcorner X_t = \eta_t$. **По формуле Картана, $\mathrm{Lie}_{X_t} \omega_t = d(\omega_t \lrcorner X_t) = d\eta_t = \frac{d\omega_t}{dt}$.**

Шаг 2: Интегрируя по t обе части $\mathrm{Lie}_{X_t} \omega_t = \frac{d\omega_t}{dt}$, получаем

$$\Psi_{t_1}^* \omega_0 = \int_0^{t_1} \mathrm{Lie}_{X_t} \omega_t dt = \int_0^{t_1} \frac{d\omega_t}{dt} dt = \omega_{t_1}.$$

■

К3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **К3-поверхность** есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы** (Бухдаль-Ламари).

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Каноническое расслоение K_M тривиально.**

Это утверждение - прямое следствие теоремы Калаби-Яу, о которой я расскажу потом.

СЛЕДСТВИЕ: **К3-поверхность голоморфно симплектична.**

(то есть допускает невырожденную, замкнутую (2,0)-форму)

Комплексные структуры и симплектические 2-формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ – комплексная 2-форма. Такая форма называется **невырожденной**, если $\operatorname{Re}\Omega$ либо $\operatorname{Im}\Omega$ – невырожденные 2-формы.

ТЕОРЕМА: Пусть M – вещественное 4-мерное многообразие, а $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ – замкнутая, невырожденная комплексная 2-форма. Предположим, что $\Omega^2 = 0$. Тогда **на M существует комплексная структура I такая, что Ω – голоморфная симплектическая форма на (M, I).**

Доказательсво через пару слайдов.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – K3-поверхность, а V – множество всех невырожденных комплексных 2-форм $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}V := V/\mathbb{C}^*$. Тогда **множество $\mathbb{P}V$ находится в биективном соответствии с множеством** $\operatorname{Comp}(M)$ **комплексных структур на M.**

Интегрируемые почти комплексные многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие (M, I) называется **интегрируемым**, если M, окольцованное пучком голоморфных функций, является комплексным многообразием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, $T^{1,0} \subset TM \otimes \mathbb{C}$ – подрасслоение векторов типа $(1,0)$, а $[T^{1,0}, T^{1,0}] \xrightarrow{N} TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ – скобка Фробениуса. Отождествив $TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ с $T^{0,1}$, мы представим N как оператор

$$N: \Lambda^2(T^{1,0}M) \longrightarrow T^{0,1}M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Этот оператор называется **тензором Ниейхойса** (Nijenhuis tensor). Его можно преставить как сечение $N \in \Lambda^{2,0}M \otimes T^{0,1}M$.

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – гладкое почти комплексное многообразие, причем $[T^{0,1}, T^{0,1}] \subset T^{0,1}$. **Тогда почти комплексная структура I интегрируема.**

ЗАМЕЧАНИЕ: **Это то же самое, что зануление тензора Ниейхойса.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Подрасслоение $B \subset TM$, удовлетворяющее $[B, B] \subset B$, называется **инволютивным.**

Комплексные структуры и симплектические 2-формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ – комплексная 2-форма. Такая форма называется **невырожденной**, если $\operatorname{Re}\Omega$ либо $\operatorname{Im}\Omega$ – невырожденные 2-формы.

ТЕОРЕМА: Пусть M – вещественное 4-мерное многообразие, а $\Omega \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ – замкнутая, невырожденная комплексная 2-форма. Предположим, что $\Omega^2 = 0$. Тогда **на M существует комплексная структура I такая, что Ω – голоморфная симплектическая форма на (M, I).**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\Omega^2 = 0$, форма Ω **разложима**, то есть представляется в виде $\Omega = \xi \wedge \zeta$ для каких-то 1-форм $\xi, \zeta \in \Lambda^2(M, \mathbb{C})$ **(докажите это).**

Шаг 2: **Ядро** формы Ω есть множество всех векторов $x \in TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, таких, что $\Omega(x, \cdot) = 0$. **В силу шага 1,** $\dim_{\mathbb{C}} \ker \Omega \geqslant 2$.

Шаг 3: Обозначим $\operatorname{Re}\Omega$ за ω_1 и $\operatorname{Im}\Omega$ за ω_2. Поскольку $\Omega^2 = 0$, имеем $\omega_1^2 = \omega_2^2$ **и** $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Значит, **форма** $\Omega \wedge \overline{\Omega} = \omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega_1^2$ **невырожденна.**

Комплексные структуры и симплектические 2-формы (продолжение)

Шаг 3: Обозначим $\operatorname{Re}\Omega$ за ω_1 и $\operatorname{Im}\Omega$ за ω_2. Поскольку $\Omega^2 = 0$, имеем $\omega_1^2 = \omega_2^2$ **и** $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Значит, **форма** $\Omega \wedge \overline{\Omega} = \omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega_1^2$ **невырожденна.**

Шаг 4: Значит, $\dim_{\mathbb{C}} \ker \Omega > 1$. Поскольку Ω симплектична на $TM/\ker\Omega$, пространство $\ker\Omega$ четномерно. Из шага 2 получаем, что $\dim \ker \Omega = 2$ везде на M, то есть $\ker\Omega$ **есть двумерное подрасслоение в** $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$**.**

Шаг 5: По формуле Картана, $0 = d\Omega(x,y,z) = \operatorname{Lie}_x \Omega(x,y) - \operatorname{Lie}_y \Omega(x,z) +$
$$\operatorname{Lie}_z \Omega(x,y) + \Omega([x,y],z) - \Omega(y,[x,z]) + \Omega(x,[y,z]). \quad (*)$$
Если $x, y \in \ker\Omega$, все слагаемые (*), кроме одного, автоматически зануляются, и мы получаем $\Omega([x,y],z) = 0$ (для любого z), иначе говоря, $[x,y] \in \ker\Omega$, и $\ker\Omega$ **– инволютивное подрасслоение.**

Шаг 6: Локально, имеем $\Omega = \xi \wedge \zeta$. Если плоскость $\langle \xi, \zeta\rangle$, порожденная ξ, ζ, пересекается с $\langle \overline{\xi}, \overline{\zeta}\rangle$, мы получим $\Omega \wedge \overline{\Omega} = 0$. В силу шага 3, это невозможно. Значит, $\ker\Omega$ **не пересекается с** $\overline{\ker\Omega}$**.**

Шаг 7: Рассмотрим оператор $I: TM \longrightarrow TM$, который равен $\sqrt{-1}$ на $\ker\Omega$ и $-\sqrt{-1}$ на $\overline{\ker\Omega}$. Поскольку $\overline{I} = I$, это оператор почти комплексной структуры. $T^{1,0}M = \ker\Omega$ **инволютивно, значит,** I **интегрируема.** ■

Пространство Тейхмюллера и отображение периодов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\operatorname{Comp}(M)$ есть множество всех интегрируемых почти комплексных структур на многообразии, с топологией, индуцированной топологией Фреше на пространстве тензоров. **Пространство Тейхмюллера** $\operatorname{Teich}(M)$ комплексных структур есть факторпространство $\operatorname{Comp}(M)/\operatorname{Diff}_0(M)$, где $\operatorname{Diff}_0(M)$ есть **группа изотопий** (связная компонента группы диффеоморфизмов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M есть K3-поверхность. **Отображение периодов** $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\operatorname{Per}} \mathbb{P}H^2(M,\mathbb{C})$ сопоставляет каждой комплексной структуре I на M прямую $H^{2,0}(M,I) \subset H^2(M,\mathbb{C})$.

Пространство периодов для К3-поверхности

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $l \in \operatorname{Per}(\operatorname{Teich}(M))$ - класс когомологий в образе отображения периодов. Тогда $l \wedge l = 0$ (потому что это (2,0)-форма) и $l \wedge \bar{l} > 0$, потому что l локально представлено формой $\xi \wedge \zeta$ для каких-то $\xi, \zeta \in \Lambda^{1,0}(M, I)$ и $l \wedge \bar{l} = \xi \wedge \zeta \wedge \bar{\xi} \wedge \bar{\zeta}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство периодов К3-поверхности есть пространство $\mathbb{P}\mathrm{er} \subset \mathbb{P}H^2(M, \mathbb{C})$ состоящее из всех прямых $\mathbb{C} \cdot l$ таких, что $l \wedge l = 0$ и $l \wedge \bar{l} > 0$. **Отображение периодов** есть отображение $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathrm{Per}} \mathbb{P}\mathrm{er}$.

ТЕОРЕМА: (Локальная теорема Торелли для К3) Отображение периодов $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\mathrm{Per}} \mathbb{P}\mathrm{er}$ **этально, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки** $I \in \operatorname{Teich}(M)$**.**

Эта теорема - основное утверждение сегодняшней лекции.

Пространство периодов и $++$-грассманиан

Пусть V – вещественное векторное пространство, снабженное скалярным произведением q. Обозначим за $\mathbb{P}\mathrm{er}(V)$ множество прямых $l \in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих $q(l,l)=0$ и $q(l,\bar{l})>0$, и пусть $\mathrm{Gr}_{+,+}(V)$ – пространство ориентированных 2-мерных плоскостей $W\subset V$, таких, что $q|_W$ положительно определено.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для каждого $W\in \mathrm{Gr}_{+,+}(V)$, рассмотрим оператор поворота на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки: $I_W:\ W\longrightarrow W$. Обозначим за $P(W)\in \mathbb{P}V_{\mathbb{C}}$ прямую, порожденную $x+\sqrt{-1}\,I_W(x)$, для $x\in W$. Тогда P **задает биекцию** $P:\ \mathrm{Gr}_{+,+}(V)\longrightarrow \mathbb{P}\mathrm{er}(V)$.

СЛЕДСТВИЕ: Пространство периодов для К3-поверхности изоморфно $SO(19,3)/SO(2)\times SO(19,1)$.

Основное утверждение этой лекции –

ТЕОРЕМА: (Локальная теорема Торелли для К3) Отображение периодов $\mathrm{Teich}(M)\xrightarrow{\mathrm{Per}}\mathbb{P}\mathrm{er}$ **этально, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки** $I\in \mathrm{Teich}(M)$.

Чтобы доказать открытость этого отображения, нам понадобятся гиперкэлеровы структуры.

Гиперкэлеровы структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Гиперкомплексное многообразие есть гладкое многообразие, снабженное комплексными структурами $I, J, K : TM \longrightarrow TM$, которые удовлетворяют кватернионным соотношениям: $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\operatorname{Id}$. **Гиперкэлерово многообразие** есть гиперкомплексное многообразие, снабженное римановой метрикой g, которая кэлерова по отношению к I, J, K.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кэлеровость I равносильна условию $\nabla(I) = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита, а гиперкэлеровость – **условию $\nabla(I) = \nabla(J) = \nabla(K) = 0$ плюс кватернионные соотношения.**

ТЕОРЕМА: (Калаби-Яу) Пусть (M, I) – К3-поверхность, $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ ее кэлеров класс, Ω – голоморфная симплектическая форма. Предположим, что $\operatorname{Re}\Omega^2 = [\omega]^2$. Тогда **на (M, I) существует и единственна гиперкэлерова структура, такая, что $[\omega_I] = [\omega]$, $\omega_J = \operatorname{Re}\Omega$, $\omega_K = \operatorname{Im}\Omega$.**

Пространство Тейхмюллера гиперкэлеровых структур

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для гиперкэлеровой структуры на поверхности, $\int_M \omega_I \wedge \omega_J = \int \omega_I \wedge \omega_K = \int \omega_J \wedge \omega_K = 0$, $\int_M \omega_I^2 = \int_M \omega_J^2 = \int_M \omega_K^2$ **(проверьте это).** Назовем n-ку векторов, удовлетворяющую этим условиям, **конформно ортонормированными**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Группа изотопий** $\operatorname{Diff}_0(M)$ многообразия M есть связная компонента группы диффеоморфизмов M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство Тейхмюллера** $\operatorname{Teich}_{hk}(M)$ гиперкэлеровых структур есть фактор пространства всех гиперкэлеровых структур на M по $\operatorname{Diff}_0(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $\operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ пространство конформно ортонормированных троек классов $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in H^2(M,\mathbb{R})$. **Отображение периодов** $\operatorname{Teich}_{hk}(M) \xrightarrow{\operatorname{Per}} \operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ переводит гиперкэлерову структуру I, J, K, g в тройку $\omega_I, \omega_J, \omega_K \in \operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Открытое отображение** есть отображение, переводящее открытые множества в открытые.

ТЕОРЕМА: Пусть M - К3-поверхность. Тогда **отображение** $\operatorname{Teich}_{hk}(M) \xrightarrow{\operatorname{Per}} \operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ **открыто в** $\operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$.

Деформации кэлеровых структур

ЗАМЕЧАНИЕ: На любом комплексном многообразии, **форма ω кэлерова, если она типа $(1,1)$, замкнута, и удовлетворяет $\omega(x, Ix) > 0$ для всех ненулевых $x \in T_m M$.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, I, ω) – компактное кэлерово многообразие, а $\operatorname{Kah}(M) \subset H^{1,1}(M)$ – кэлеров конус (множество кэлеровых классов). Введем на $H^2(M)$ евклидову метрику E. Тогда **существует $\varepsilon_g > 0$ такое, что ε-шар $B := B_{E,\varepsilon_g}([\omega])$ с центром в ω содержится в $\operatorname{Kah}(M)$.** Более того, ε_g непрерывно зависит от g, I и их производных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем сечение $H^2(M) \xrightarrow{\psi} \Lambda^2(M)_{\text{closed}}$, например, выбрав гармонический представитель у каждой формы. Небольшая деформация эрмитовой формы в классе I-инвариантных форм снова эрмитова, значит, для небольших $\alpha \in H^{1,1}(M)$, $\omega + \psi(\alpha)$ это кэлерова форма. ■

Образ отображения периодов для гиперкэлеровых структур

ТЕОРЕМА: Пусть M - K3-поверхность. **Тогда образ** $\operatorname{Teich}_{hk}(M) \xrightarrow{\operatorname{Per}} \operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ **открыт в** $\operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$.

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим ортогональное дополнение $\langle\omega_J,\omega_K\rangle^\perp \subset H^2(M,\mathbb{R})$. Тогда

$$\langle\omega_J,\omega_K\rangle^\perp = H^{1,1}(M,I).$$

В самом деле, $\int \eta\wedge\Omega = 0$ для любой (1,1)-формы η **(а почему?)**, а $\dim\langle\omega_J,\omega_K\rangle^\perp = \dim h^{1,1}(M)$ **(проверьте)**.

Шаг 2: Каждый кэлеров класс $[\omega]\in H^{1,1}(M,I)$, удовлетворяющий $\int_M[\omega]^2 = \int_M \operatorname{Re}\Omega^2$, **является классом ω_I для какой-то гиперкэлеровой структуры,** в силу теоремы Калаби-Яу. Значит, $\operatorname{Per}(\operatorname{Teich}_{hk}(M))$ вместе с каждой тройкой $\omega_1,\omega_2,\omega_3 \in \operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ содержит множество всех троек вида $\omega_1',\omega_2,\omega_3 \in \operatorname{St}_3^c(H^2(M,\mathbb{R}))$, для всех $\omega_1'\in S$, где $S\subset\langle\omega_2,\omega_3\rangle^\perp$ – пересечение $\operatorname{Kah}(M,I)$ и сферы радиуса $\int_M\omega_1^2$.

Отображение периодов для гиперкэлеровых структур (2)

Шаг 3: Пусть $\pi: X \longrightarrow Y$ – локально-тривиальное гладкое расслоение многообразий. Назовем **субрасслоением** такое подмножество $U \subset X$, что все слои отображения $\pi: U \longrightarrow \pi(Y)$ открыты в слоях π, причем для каждой точки U найдется окрестность $U' \subset U$, которая локально-тривиально расслоена над $\pi(U')$. Мы доказали, что **забывающая проекция** $\operatorname{Per}(\operatorname{Teich}_{hk}(M)) \longrightarrow \operatorname{St}_2^c(H^2(M,\mathbb{R}))$ **– субрасслоение.**

Шаг 4: Теперь утверждение теоремы сводится к следующему геометрическому наблюдению:

ЛЕММА: Пусть V – вещественное векторное пространство с невырожденным скалярным произведением, а $\operatorname{St}_k(V)$ – многообразие ортонормированных k-реперов, $k > 1$. Рассмотрим отображения забывания $\operatorname{St}_k(V) \longrightarrow \operatorname{St}_{k-1}(V)$ (их k штук: $\pi_1, ..., \pi_k$). Пусть $U \subset \operatorname{St}_k(V)$ – какое-то подмножество, такое, что $\pi_i|_U$ – субрасслоение для всех i. **Тогда U открыто в $\operatorname{St}_k(V)$.**

Образ отображения периодов для гиперкэлеровых структур: простая геометрическая лемма

ЛЕММА: Пусть V – вещественное векторное пространство с невырожденным скалярным произведением, а $\mathsf{St}_k(V)$ – многообразие ортонормированных k-реперов, $k > 1$. Рассмотрим отображения забывания $\mathsf{St}_k(V) \longrightarrow \mathsf{St}_{k-1}(V)$ (их k штук: $\pi_1, ..., \pi_k$). Пусть $U \subset \mathsf{St}_k(V)$ – какое-то подмножество, такое, что $\pi_i|_U$ – субрасслоение для всех i. **Тогда U открыто в $\mathsf{St}_k(V)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Ограничимся $k = 2$, для $k > 2$ доказательство аналогично. Поскольку отображение $\pi_i : \; U \longrightarrow \pi_i(U)$ открыто, достаточно доказать, что его образ открыт. Рассмотрим двойное слоение на $\mathsf{St}_2(V)$, составленное из слоев π_1, π_2; вместе с каждой точкой, U содержит окрестность содержащего ее листа обоих слоений, значит, открыто.

■

Открытость отображения периодов

СЛЕДСТВИЕ: Отображение периодов $\operatorname{Teich}(M) \xrightarrow{\operatorname{Per}} \mathbb{P}\mathrm{er}$ **открыто.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим следующую диаграмму пространств Тейхмюллера и пространств периодов:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Teich}_h^{\mathrm{Vol}}(M) & \xrightarrow{\operatorname{Per}} & \operatorname{St}_3(H^2(M,\mathbb{R})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Teich}(M) & \xrightarrow{\operatorname{Per}} & \operatorname{Gr}_{+,+}(V) \end{array}$$

Здесь первая вертикальная стрелка переводит (M,I,J,K,g) в (M,I), вторая переводит $(\omega_I,\omega_J,\omega_K) \in \operatorname{St}_3(H^2(M,\mathbb{R}))$ в $\langle \omega_J, \omega_K \rangle$.

Вертикальные стрелки представляют собой локально тривиальные расслоения, поэтому открыты, верхнее отображение периодов открыто, как было уже доказано, а нижнее открыто в силу коммутативности этой диаграммы. ■

Локальная теорема Торелли (доказательство)

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть M – К3. Рассмотрим отображение периодов $\Psi:\ \mathsf{Comp}(M) \longrightarrow \mathbb{P}\mathsf{er}$. **Тогда все слои Ψ локально линейно связны.**

УКАЗАНИЕ: $\mathsf{Comp}(M)$ – пространство всех замкнутых, невырожденных комплексно-значных 2-форм, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$, то есть пересечение квадрик в линейном пространстве, то есть многообразие.

ТЕОРЕМА: (Локальная теорема Торелли для К3) Отображение периодов $\mathsf{Teich}(M) \xrightarrow{\mathsf{Per}} \mathbb{P}\mathsf{er}$ этально, т.е. задается гомеоморфизмом в окрестности каждой точки $I \in \mathsf{Teich}(M)$.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку Per открыто, и непрерывно, **достаточно показать, что в окрестности каждой точки $I \in \mathsf{Teich}(M)$ оно задает биекцию этой окрестности на ее образ.**

Доказательство локальной теоремы Торелли (2)

Шаг 2: Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Comp}(M) & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{P}\mathsf{er} \\ {\scriptstyle \Psi_0}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \mathsf{Id}}\Big\downarrow \\ \mathsf{Teich}(M) & \xrightarrow{\mathsf{Per}} & \mathbb{P}\mathsf{er} \end{array}$$

Осталось проверить, что **каждая связная компонента слоя Ψ равна связной компоненте слоя Ψ_0, то есть орбите $\mathsf{Diff}_0(M)$.**

Шаг 3: Как и в доказательстве теоремы Мозера, мы свели локальную теорему Торелли к следующему утверждению.

Теорема 1: Пусть $I_t : [0,1] \longrightarrow \mathsf{Comp}(M)$ – семейство комплексных структур на К3, причем периоды у них одинаковы. **Тогда существует семейство диффеоморфизмов $V_t \in \mathsf{Diff}_0(M)$, переводящих I_0 в I_t.**

Теорема Мозера для отображения периодов

Комплексные структуры находятся в биективном соответствии $\mathbb{P}\widetilde{\operatorname{Comp}}(M)$, где $\widetilde{\operatorname{Comp}}(M)$ – множество замкнутых, невырожденных комплексных 2-форм Ω, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$. Отображение периодов переводит $\Omega \in \widetilde{\operatorname{Comp}}(M)$ в его класс когомологий. Значит, Теорема 1 вытекает из следующей.

Теорема 2: Пусть $\Omega_t: [0,1] \longrightarrow \widetilde{\operatorname{Comp}}(M)$ – семейство замкнутых, невырожденных комплексных 2-форм, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$, причем класс когомологий $[\Omega_t] \in H^2(M, \mathbb{C})$ не зависит от t. **Тогда существует семейство диффеоморфизмов $V_t \in \operatorname{Diff}_0(M)$, таких, что $V_t^* \Omega_0 = \Omega_t$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\Omega_t' := \frac{d\Omega_t}{dt}$. Если найдется векторное поле X_t такое, что $\operatorname{Lie}_{X_t} \Omega_t = \Omega_t'$, то

$$V_{t_1}^* \Omega_0 = \int_0^{t_1} \operatorname{Lie}_{X_t} \Omega_t dt = \int_0^{t_1} \frac{d\Omega_t}{dt} dt = \Omega_{t_1}$$

для потока диффеоморфизмов V_t, полученного из формулы $\frac{dV_t}{dt} = X_t$. **Осталось найти X_t.**

Теорема Мозера для отображения периодов (2)

Нам нужно найти векторное поле X_t такое, что $\operatorname{Lie}_{X_t}\Omega_t = \Omega'_t$.
Шаг 2: Отображение подстановки $\Lambda^{2,0}M \otimes_{\mathbb R} T_{\mathbb R}M \longrightarrow \Lambda^{1,0}(M)$ сюрьективно **(проверьте).**

Шаг 3: Поскольку Ω'_t точна, имеем $\Omega'_t = d\alpha_t$. Если α_t – (1,0)-форма, ее можно получить как $\Omega_t \lrcorner X_t$ в силу предыдущего шага, что дает $\Omega'_t = d\alpha_t = d(\Omega_t \lrcorner X_t) = \operatorname{Lie}_{X_t}\Omega_t$. **Для доказательства осталось найти $\alpha_t \in \Lambda^{1,0}(M)$ такую, что $\Omega'_t = d\alpha_t$.**

Шаг 4: Дифференцируя $\Omega_t^2 = 0$, получаем $\Omega'_t \wedge \Omega_t = 0$. **Это дает $\Omega'_t \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$.**

Шаг 5: В силу шага 3 и шага 4, **Теорема 2 следует из такой леммы.**
ЛЕММА: Пусть M компактное кэлерово многообразие, $H^{0,1}(M) = 0$, а $\eta \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$ – точная. **Тогда $\eta = d\alpha$, для какой-то $\alpha \in \Lambda^{1,0}(M)$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\eta = d\beta$, где $\beta = \beta^{1,0} + \beta^{0,1}$ Поскольку $\eta \in \Lambda^{1,1}(M) + \Lambda^{2,0}(M)$, имеем $\overline{\partial}(\beta^{0,1}) = 0$. Первые когомологии комплекса $(\Lambda^{0,*}(M), \overline{\partial})$ зануляются, потому что $H^{0,1}(M) = 0$, а значит, $\beta^{0,1} = \overline{\partial}\psi$.

Шаг 2: Получаем $\eta = d(\beta - d\psi)$, а $\beta - d\psi = \beta^{1,0} + \beta^{0,1} - \partial\psi - \beta^{0,1}$ – (1,0)-форма. ∎