К3 поверхность 3: гиперкэлеровы структуры и пространства Фреше

3.1. Кватернионные структуры

Определение 3.1. Пусть $h \in \mathbb{H}$ – унитарный кватернион, а (M, I, J, K, g) – гиперкэлерово многобразие. Тогда $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ – тоже гиперкэлерово многобразие . Гиперкэлеровы многобразия (M, I, J, K, g) и $(M, hIh^{-1}, hJh^{-1}, hKh^{-1}, g)$ называются **эквивалентными**.

Задача 3.1. Пусть (M, g) – 4-мерное риманово многобразие. Докажите, что любые две гиперкэлеровы структуры на (M, g) эквивалентны, либо найдите контрпример.

Задача 3.2. Пусть на 4-мерном многообразии заданы симплектические формы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, удовлетворяющие $\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_3 = 0$ и $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2$. Докажите, что есть гиперкэлерова структура, для которой $\omega_1 = \omega_I$, $\omega_2 = \omega_J$, $\omega_3 = \omega_K$.

Задача 3.3. Пусть на компактном 4-мерном многобразии задана гиперкэлерова структура, а η – точная, кватернионно-инвариантная 2-форма. Докажите, что $\eta = 0$.

3.2. Многобразия Фреше

Задача 3.4. Пусть Z – пространство всех невырожденных комплексных 2-форм на компактном 4-мерном многообразии, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$, с топологией, индуцированной с топологии Фреше на пространстве всех 2-форм. Докажите, что Z – многобразие Фреше.

Задача 3.5. В условиях предыдущей задачи, пусть $Z_0 \subset Z$ – пространство всех замкнутых форм в Z. Постройте ретракцию некоторой окрестности $Z_0 \subset Z$ на Z_0.

Задача 3.6. Пусть V – пространство последовательностей вещественных чисел с топологией почленной сходимости. Докажите, что V – пространство Фреше. Докажите, что V не допускает никакой нормы, совместимой с этой топологией (*полунормы* допускает, естественно).

Задача 3.7. Пусть M комплексное многобразие, а V – пространство голоморфных функций, с топологией равномерной сходимости на компактах. Докажите, что V – пространство Фреше.