К3 на Фонтанке,

лекция 2: топология поверхностей

Миша Вербицкий

Первая летняя математическая школа на Фонтанке: Геометрия 2017

4 июля 2017

Топология 4-мерных многообразий: теорема Фридмана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметричная билинейная форма η на $V := \mathbb{Z}^n$ называется **унимодулярной**, если она задает изоморфизм $V \longrightarrow V^*$, **четной**, если множество всех $\eta(x,x)$ содержится в $2 \cdot \mathbb{Z}$, и **нечетной** если нет.

ТЕОРЕМА: **(Рохлин, Ву)** Если форма пересечения гладкого односвязного 4-многообразия четна, **ее сигнатура делится на 16.**

ТЕОРЕМА: **(Фридман, 1982)** **Класс гомотопии компактного односвязного 4-мерного многообразия M однозначно определяется его формой пересечения на $H^2(M,\mathbb{Z})$, которая унимодулярна.** Более того, **такое M существует для любой унимодулярной формы**. Для четных форм пересечения, гомотопическая эквивалентность эквивалентна гомеоморфности. Для нечетных форм пересечения, существует ровно два топологических многообразия с заданным гомотопическим типом; одно из них допускает кусочно-линейную структуру, другое нет.

ТЕОРЕМА: **(Дональдсон, 1986)** На гладком компактном односвязном многообразии с нечетной, положительно определенной формой пересечения η, **она диагонализуется в каком-то целочисленном базисе: $\eta = \sum x_i \otimes x_i$.**

Классификация неопределенных форм

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметричная 2-форма η называется **неопределенной**, если $\eta(x,x)<0$ и $\eta(y,y)>0$ для каких-то x и y.

ТЕОРЕМА:
(классификация унимодулярных симметричных билинейных форм):
* Пусть q – нечетная унимодулярная неопределенная форма. Тогда q **диагональна:** $q=\sum \pm x_i\otimes x_i$.
* Пусть q – четная унимодулярная неопределенная форма на V. **Тогда** (V,q) **разлагается в ортогональную прямую сумму** подпространств с билинейной формой, которая имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(такие пространства называются "гиперболическими"), и подпространств $E_{\pm 8}$, изоморфных решетке пересечения корней алгебры E_8:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

или такой же решетке с формой пересечения противоположного знака.

4-мерные многообразия как связные суммы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связная сумма** $M_1\#M_2$ многообразий M_1 и M_2 одинаковой размерности получается так: из M_1 и из M_2 вырезается шар, и полученные многообразия склеиваются по образовавшейся компоненте границы (сфере).

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M_1, M_2 – многообразия с формой пересечения q_1, q_2. Тогда для любого i с $0 < i < \dim M$, имеет место $H^i(M_1\#M_2) = H^i(M_1) \oplus H^i(M_2)$, и **форма пересечения на $M_1\#M_2$ равна $q_1 \oplus q_2$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Из теорем Фридмана и Дональдсона следует, что **любое гладкое многообразие с нечетной формой пересечения гомеоморфно связной сумме нескольких копий $\mathbb{C}P^2$ (форма пересечения на $\mathbb{C}P^2$ имеет сигнатуру 1) и нескольких копий многообразия $\overline{\mathbb{C}P^2}$,** полученного из $\mathbb{C}P^2$ заменой ориентации (на нем форма пересечения имеет сигнатуру -1).

4-мерные многообразия с четной формой пересечения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **E_8-многообразие** есть односвязное 4-многообразие с формой пересечения E_8. По теореме Фридмана, оно однозначно определено. По теореме Рохлина, **E_8-многообразие не допускает гладкой структуры** (его сигнатура не делится на 16).

ЗАМЕЧАНИЕ: Из классификации четных, неопределенных форм следует, что **каждое 4-многообразие с четной, неопределенной формой пересечения гомеоморфно связной сумме нескольких копий E_8-многообразия, E_8-многообразия с противоположной ориентацией (оно называется $-E_8$-многообразие), и $\S^2 \times S^2$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **4-многообразие K3** можно определить как связную сумму двух $-E_8$-многообразий и трех $S^2 \times S^2$. **Оно допускает гладкую структуру (счетное число разных).**

ВОПРОС: Какие связные суммы вида $\pm E_8^k \#(S^2 \times S^2)^l$ допускают гладкую структуру?

ТЕОРЕМА: **(Фурута)** Если $E_8^{2k} \#(S^2 \times S^2)^l$ допускает гладкую структуру, то $l > 2k$.

Комплексные структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексной структурой** на вещественном векторном пространстве V называется эндоморфизм $I \in \operatorname{End}(V)$, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Продолжим I на тензоры формулой $I(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma...) = I(\alpha)\otimes I(\beta)\otimes I(\gamma)...$ **Группа, порожденная I, изоморфна $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.** Поэтому, для любого тензора t, сумма $t+I(t)+I^2(t)+I^3(t)$ инвариантна относительно I.

СЛЕДСТВИЕ: Если g – положительно определенное скалярное произведение на V, то $g_I := g+I(g)+I^2(G)+I^3(g)$ тоже положительно определено и I-инвариантно: $I(g_I) = I$. Другими словами, **I – ортогональный оператор относительно g_I.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Положительно определенное скалярное произведение, в котором I ортогонально, называется **эрмитовой метрикой** на (V, I). Мы только что доказали, что она всегда существует.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $g+I(g)$ I-инвариантно для любого четного тензора.

Комплексные структуры (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Все собственные значения I простые (то есть I **полупрост**, другими словами, диагонализуется). В самом деле, **любой ортогональный оператор полупрост.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть α – собственное значение I. Поскольку $\alpha^2 = -1$, имеем $\alpha = \pm\sqrt{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное пространство I, соответствующее $\sqrt{-1}$, обозначается $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, а соответствующее $-\sqrt{-1}$ обозначается $V^{0,1}$. Очевидно, $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку, к тому же, I вещественный, получаем, что $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$. В частности, это пространства одинаковой размерности.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что естественная проекция $V^{1,0}$ на V вдоль $V^{0,1}$ задает изоморфизм вещественных пространств $V^{0,1} \longrightarrow V$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что оператор комплексной структуры **однозначно задается подпространством $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ половинной размерности,** которое не пересекается с $V \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Эрмитовы формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово пространство** (V, I, g) есть пространство, снабженное комплексной структурой I и эрмитовой метрикой g.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть I – оператор комплексной структуры на вещественном пространстве V, а g – эрмитова метрика. Рассмотрим билинейную форму $\omega(x, y) = g(x, Iy)$. Тогда $\omega(x, y) = g(x, Iy) = g(Ix, I^2y) = -g(Ix, y) = -\omega(y, x)$. Поэтому ω **кососимметрична**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма ω называется **эрмитовой формой** на эрмитовом пространстве (V, I, g)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в тройке I, g, ω, **каждый тензор выражается через остальные два.**

Разложение Ходжа

Обозначим за $\Lambda^* V$ грассманову алгебру, порожденную V.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что $\Lambda^*(V \oplus W)$ изоморфно как векторное пространство $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W$. Изоморфизм $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W \longrightarrow \Lambda^*(V \oplus W)$ задается отображением $x \otimes y \longrightarrow x \wedge y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (V, I) – пространство, снабженное комплексной структурой, а $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ его комплексификация. Тогда $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong (\Lambda^* V^{1,0}) \otimes (\Lambda^* V^{0,1})$. Рассмотрим разложение $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}}$, где $\Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}} = \Lambda^p V^{1,0} \bigwedge \Lambda^q V^{0,1}$ Оно называется **разложением Ходжа**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Комплексная структура на V **однозначно задает комплексную структуру на V^* (и наоборот).**

УПРАЖНЕНИЕ: Верно ли, что любая (p,p)-форма I-инвариантна? Верно ли, что любая I-инвариантная форма имеет тип (p,p)?

Почти комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Почти комплексная структура** на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$.

ПРИМЕР: Возьмем $\mathbb{C}^n$, с комплексными координатами $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$. Тогда $I(x_i) = y_i$, $I(y_i) = -x_i$ – почти комплексная структура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Разложение Ходжа** на дифференциальных формах записывается $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}(M)$, причем $\Lambda^{p,q}(M) = \Lambda^{p,0}(M) \bigwedge \Lambda^{0,q}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

Интегрируемость почти комплексных многообразий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,I) – почти комплексное многообразие. Оно называется **комплексным**, а I **интегрируемым** если в каждой точке существуют координаты x_i, y_i такие, что $I(d/dx_i) = d/dy_i$, $I(d/dy_i) = -d/dx_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ: В этой ситуации, **функции** $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$ **голоморфные.** Они называются **комплексными координатами**.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что на комплексном многообразии, **коммутатор векторных полей типа** $(1,0)$ **имеет тип** $(1,0)$**:**

$$[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие называется **формально интегрируемым**, если $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$

ТЕОРЕМА: (Newlander-Nirenberg) **Формально интегрируемое почти комплексное многообразие интегрируемо.**

Кэлеровы многообразия

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – почти комплексное эрмитово многообразие. **Тогда следующие условия эквивалентны:**

(i) **Комплексная структура I интегрируема, а эрмитова форма ω замкнута.**

(ii) $\nabla(I) = 0$**,** где ∇ есть связность Леви-Чивита.

УПРАЖНЕНИЕ: Выведите (i) из (ii).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное эрмитово многообразие, удовлетворяющее условиям (i) или (ii), называется **кэлеровым**. Класс когомологий $[\omega] \in H^2(M)$ называется **кэлеровым классом** M.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что комплексное подмногообразие кэлерова многообразия – **снова кэлерово.**

Метрика Фубини-Штуди

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M = \mathbb{C}P^n$ – комплексное проективное пространство, а g – $U(n+1)$-инвариантная метрика. Она называется **метрикой Фубини-Штуди**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Метрику Фубини-Штуди можно получить, взяв произвольную эрмитову метрику на $\mathbb{C}P^n$ и **усреднив по компактной группе $U(n+1)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Стабилизатор $x \in \mathbb{C}P^n$ в $U(n+1)$ изоморфен $U(n)$, а $T_x\mathbb{C}P^n$ изоморфно $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием $U(n)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть g – $U(n)$-инвариантная положительная симметрическая форма на $\mathbb{C}^n$. Тогда g **пропорциональна обычной евклидовой метрике.**

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **единственна с точностью до скалярного множителя.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть η – $U(n)$-инвариантная 3-форма на $\mathbb{C}^n$. Докажите, что $\eta = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **кэлерова**.

Проективные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Замкнутое комплексное подмногообразие $\mathbb{C}P^n$ называется **проективным**

ТЕОРЕМА: **Проективное многообразие всегда кэлерово.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно комплексно, а эрмитова форма симплектична.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку $H^2(\mathbb{C}P^n)$ одномерно, **можно выбрать метрику Фубини-Штуди с целочисленным кэлеровым классом.**

СЛЕДСТВИЕ: Проективное многообразие **допускает кэлерову структуру с целочисленным кэлеровым классом.**

ТЕОРЕМА: (Кодаира) Пусть M – компактное, кэлерово многообразие с целочисленным кэлеровым классом. **Тогда M проективно.**

Первый класс Черна

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное расслоение на многообразии, U_α – его покрытие, на котором B тривиализовано, а $\varphi_{\alpha\beta}$ – функции перехода, определенные на $U_\alpha \cap U_\beta$. На пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеем $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ то есть B **задает $(C^\infty M)^*$-значный 1-коцикл.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Классы изоморфизма расслоений взаимно однозначно соответствуют $H^1(M, (C^\infty M)^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \longrightarrow C^\infty M \longrightarrow (C^\infty M)^* \longrightarrow 0,$$

получаем изоморфизм $H^1(M, (C^\infty M)^*) \xrightarrow{c_1^{\mathbb{Z}}} H^2(M, \mathbb{Z})$.

СЛЕДСТВИЕ: Комплексное линейное расслоение топологически тривиально $\Leftrightarrow c_1^{\mathbb{Z}}(B) = 0$.

Первый класс Черна и формула Гаусса-Бонне

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что кривизна линейного расслоения - замкнутая (1,1)-форма.

ТЕОРЕМА: (Гаусс-Бонне)
Класс когомологий $[\omega]$ кривизны линейного расслоения L выражается через его класс Черна: $[\omega] = 2\pi c_1(L)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I, ω) – n-мерное кэлерово многообразие, а $K(M) := \Lambda^{n,0}(M)$ – его **каноническое расслоение** (расслоение комплексно-линейных форм объема). **Первый класс Черна комплексного n-мерного многообразия** есть $c_1(M) := c_1(\Lambda^{n,0}(M))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многообразие Калаби-Яу есть компактное кэлерово многообразие с $c_1^{\mathbb{Z}}(M) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: По теореме Калаби-Яу, каждое "многообразие Калаби-Яу" (в смысле этого определения) допускает кэлерову метрику с голономией, лежащей в $SU(n)$.

Теорема Калаби-Яу

ЗАМЕЧАНИЕ: Если задана вещественная $(1,1)$-форма η, ей соответствует симметрическая 2-форма $g_\eta(x,y) = \eta(x, Iy)$. **Это задает биекцию между вещественными $(1,1)$-формами и I-инвариантными симметрическими 2-формами**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Theta_K \in \Lambda^{1,1}(M, \mathbb{R})$ – кривизна связности Леви-Чивита на каноническом расслоении кэлерова многообразия. **Кривизна Риччи** M есть симметрическая 2-форма $\operatorname{Ric}(x,y) = \Theta_K(x, Iy)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика называется **риччи-плоской**, если ее кривизна Риччи равна нулю.

ТЕОРЕМА: (Калаби-Яу) Пусть (M, I) – многообразие Калаби-Яу. **Тогда существует единственная риччи-плоская кэлерова метрика в каждом кэлеровом классе.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Такая метрика называется **метрикой Калаби-Яу**. Поскольку ее голономия действует тривиально на комплексно-линейных формах объема, она лежит в $SU(n)$.

К3-поверхности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: К3-поверхность есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы (Бухсдаль-Ламари).

Название К3 дано Андре Вейлем в честь Куммера, Кэлера, Кодаиры.

"Faichan Kangri is the 12th highest mountain on Earth."

Chez les Weil. André et Simone

André Weil: 6 May 1906 - 6 August 1998.

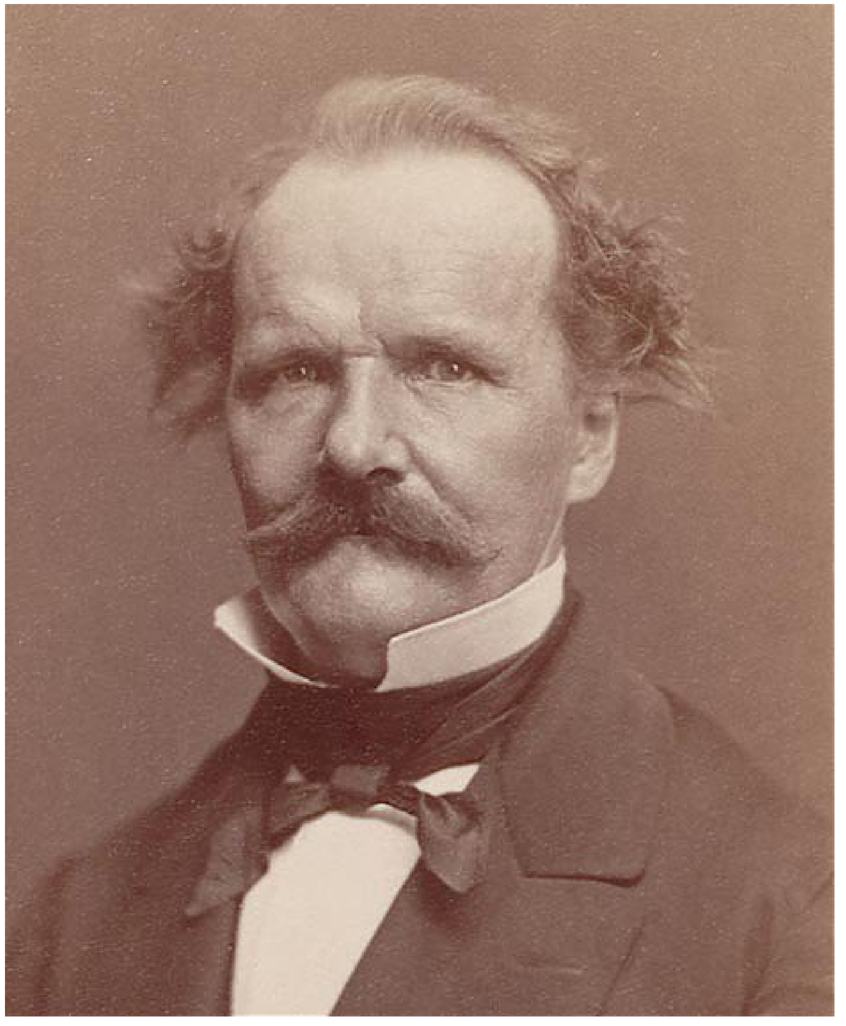
“Simone et André à Penthiévre, 1918-1919”

Erich Kähler

(Erich Kähler: 1990)

16 January 1906 - 31 May 2000

Ernst Eduard Kummer



Ernst Kummer: 29 January 1810 - 14 May 1893

Kunihiko Kodaira

(Kunihiko and Seiko Kodaira)

Kunihiko Kodaira: 16 March 1915 - 26 July 1997

Свойства К3-поверхностей

Пусть M – К3-поверхность.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Каноническое расслоение K_M тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку $b_1 = 0$, а M кэлерово, имеем $h^{0,1} = H^1(\mathcal{O}_M) = 0$. Поэтому из экспоненциальной точнпй последовательности $H^1(M, \mathcal{O}_M) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z})$ получаем, что K_M **тривиально** (его класс Черна равен нулю же). ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика M, получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для К3-поверхности:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Формула универсальных коэффициентов

ТЕОРЕМА: (формула универсальных коэффициентов): Для любого топологического пространства X и любого кольца коэффициентов A,

$$0 \to H_i(X, \mathbf{Z}) \otimes A \to H_i(X, A) \to \mathrm{Tor}(H_{i-1}(X, \mathbf{Z}), A) \to 0$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Когомологии К3 не имеют кручения.

Доказательство. Шаг 1: Если $H_1(M)$ имеет кручение, то у M есть конечное накрытие. **Такое накрытие – снова К3-поверхность,** то есть его топологическая эйлерова характеристика равна 24. Но эйлерова характеристика $e(\tilde{M})$ n-листного накрытия M равна $n \cdot e(M)$, так что $n = 1$.

Шаг 2: По формуле универсальных коэффициентов, $H_2(M, \mathbb{Z})$ **не имеет кручения.** По двойственности Пуанкаре, то же верно и в отношении $H^2(M, \mathbb{Z})$.

Шаг 3: По формуле универсальных коэффициентов, $H_3(M, \mathbb{Z})$ **не имеет кручения, значит,** $H^2(M, \mathbb{Z})$ **тоже.** ■