К3 поверхность 2: билинейные формы

Определение 2.1. Решетка есть конечно-порожденный $\mathbb{Z}$-модуль без кручения. **Билинейная форма** на решетке есть билинейное симметричное отображение $L \otimes_{\mathbb{Z}} L \longrightarrow Z$

Задача 2.1. Пусть L – решетка с неопределенной билинейной симметричной формой q.

а. Докажите, что группа $O(L, q)$ бесконечна, если L унимодулярна.

б. [*] Докажите, что группа $O(L, q)$ бесконечна, если ранг L больше 2.

в. Докажите, что $O(L, q)$ бесконечна, если L двумерная неопределенная решетка с невырожденным скалярным произведением, причем $q(x, x) \neq 0$ для любого ненулевого вектора $x \in L$.

г. Докажите, что $O(L, q)$ бесконечна, если L двумерная неопределенная решетка с вырожденным скалярным произведением.

Задача 2.2. Пусть L – решетка с неопределенной унимодулярной билинейной симметричной формой q, которая нечетна. Докажите, что q диагонализуется в каком-то базисе.

Задача 2.3 (*). Докажите аналогичную классификационную теорему для четных форм: в каком-то базисе, q будет выражаться как сумма блоков, состоящих из двумерных гиперболических решеток и решетки $(\pm E_8)^n$.

Задача 2.4. Верно ли, что $E_8 \oplus -E_8$ есть прямая сумма 8 копий решетки $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Задача 2.5. Пусть L – унимодулярная решетка. Докажите, что группа изометрий $O(L)$ действует на множестве S_λ векторов $x \in L$ с $q(x, x) = \lambda$ с конечным числом орбит.

Задача 2.6. Найдите алгебру когомологий многообразия $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$.

Задача 2.7. Найдите алгебру когомологий многообразия $(S^2 \times S^3) \# (S^2 \times S^3)$.