К3 на Фонтанке,

лекция 1: Классы Черна

Миша Вербицкий

Первая летняя математическая школа на Фонтанке: Геометрия 2017

3 июля 2017

Градуированные векторные пространства и алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированное векторное пространство** есть пространство $V^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Еслу V^* градуировано, пространство эндоморфизмов $\operatorname{End}(V^*) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{End}^i(V^*)$ тоже градуировано,

$$\operatorname{End}^i(V^*) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}(V^j, V^{i+j}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированная алгебра** (или "градуированная ассоциативная алгебра") есть алгебра $A^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ с умножением, которое совместимо с градуировкой: $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Билинейное отображение градуированных пространств, которое удовлетворяет $A^i \cdot B^j \subset C^{i+j}$, называется **градуированным**, или **совместимым с градуировкой**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Категорию градуированных векторных пространств можно определить как **категорию векторных пространств с действием $U(1)$**; весовое разложение определяет градуировку по формуле $\rho(t)|_{A^n} = e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}$. Тогда **градуированная алгебра есть ассоциативная алгебра в категории пространств с $U(1)$-действием.**

Суперкоммутатор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор на градуированном пространстве называется **четным** (**нечетным**), если он сдвигает градуировку на четное (нечетное) число. **Четность** $\tilde{a}$ оператора a есть 0, если он четный, 1 если нечетный. Мы говорим, что оператор **чистый** если он четный или нечетный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Суперкоммутатор** чистых элементов определяется формулой $\{a, b\} = ab - (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} ba$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Градуированная ассоциативная алгебра A^* называется **суперкоммутативной**, или **градуированной коммутативной**, если в A^* суперкоммутатор равен нулю.

ПРИМЕР: Алгебра Грассмана $\Lambda^* V$ суперкоммутативна.

Биалгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – градуированная коммутативная, ассоциативная алгебра над полем k. A называется **биалгеброй**, если A снабжена морфизмом градуированных алгебр $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes_k A$ **("коумножением")**, причем имеет место **условие ассоциативности:** $\Delta \otimes \mathrm{Id}_A \circ \Delta = \mathrm{Id}_A \otimes \Delta \circ \Delta$: $A \longrightarrow A \otimes_k A \otimes_k A$. **Коединица** биалгебры есть гомоморфизм k-алгебр $A \xrightarrow{\varepsilon} k$ такой, что $\Delta \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_A) = \Delta \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \varepsilon) = \mathrm{Id}_A$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Все биалгебры в дальнейшем молчаливо предполагаются снабженными единицей**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Условие коассоциативности вместе с коединицей **означает просто, что двойственное пространство A^* снабжено структурой алгебры.** Согласованность с умножением в A – то, что **структура алгебры на A^* задается морфизмом A-модулей.**

Примеры биалгебр

ПРИМЕР: Пусть N – множество, снабженное коммутативной, ассоциативной операцией $N \times N \xrightarrow{m} N$ (такая структура называется **структурой коммутативного моноида**). Тогда **кольцо k-значных функций $C(N)$ образует биалгебру,** где морфизм коумножения индуцируется отображением $m^* C(N) \longrightarrow C(N \times N) = C(N) \otimes_k C(N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Понятие биалгебры есть абстракция этого наблюдения: эвристически, **биалгебры суть алгебры функций на моноидах**.

ПРИМЕР: Пусть N – связное топологическое пространство, снабженное непрерывной операцией $N \times N \xrightarrow{m} N$, задающей на N структуру коммутативного, ассоциативного моноида. Рассмотрим коумножение на алгебре когомологий $H^*(N)$, заданное отображением $m^*: \ H^*(N) \longrightarrow H^*(N \times N) = H^*(N) \otimes_k H^*(N)$. **Тогда $H^*(N)$ есть биалгебра** (проверьте это).

Алгебры Хопфа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Биалгебра называется **алгеброй Хопфа**, если она снабжена гомоморфизмом $A \xrightarrow{S} A$ (**"отображением антипода"**), и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[rr, "S\otimes \mathrm{Id}"] & & A \otimes A \arrow[dr, "mult"] & \\
A \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & k \arrow[rr, "1"] & & A \\
 & A \otimes A \arrow[rr, "\mathrm{Id}\otimes S"'] & & A \otimes A \arrow[ur, "mult"'] &
\end{tikzcd}$$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Условие антипода самодвойственно:** если A – алгебра Хопфа, то A^* – тоже алгебра Хопфа.

ПРИМЕР: Пусть N – группа, а $C(N)$ – пространство функций на N, снабженное структурой биалгебры. Тогда отображение $n \longrightarrow n^{-1}$ задает на $C(N)$ структуру антипода. Мы получили, что **алгебра функций $C(N)$ на группе есть алгебра Хопфа** (проверьте это).

ПРИМЕР: Пусть G – топологическая группа, а $H^*(G)$ – ее алгебра когомологий, снабженная структурой биалгебры. Рассмотрим отображение $H^*(G) \xrightarrow{S} H^*(G)$, индуцированное $x \longrightarrow x^{-1}$. **Тогда $H^*(G)$ – алгебра Хопфа** (проверьте это).

H-группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **H-группа** есть топологическое пространство M, снабженное непрерывным отображением $M \times M \xrightarrow{\mu} M$, **("отображением умножения")**, таким, что ограничение μ на $M \times \{e\}$ гомотопно тождественному для какого-то $e \in M$ **("гомотопическая единица")**, и отображением $M \xrightarrow{\eta} M$ **("взятием обратного")**, удовлетворяющим аксиомам группы **с точностью до гомотопии**. А именно, имеет место

* **гомотопическая ассоциативность** композиции $\mu \times \mathrm{Id} \circ \mu$ и $\mathrm{Id} \times \mu \circ \mu$ гомотопны как отображения из $M \times M \times M$ в M,

* **отображение гомотопического обращения**: композиции $\mathrm{diag} \circ (\eta \times \mathrm{Id}) \circ \mu$ и $\mathrm{diag} \circ (\mathrm{Id} \times \eta) \circ \mu$ гомотопны отображению M в точку.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если не требуется H-ассоциативности и наличия H-обратного, M называется **H-пространством**

ПРИМЕР: Проверьте, что **пространство петель $\Omega(X, x)$ является H-группой.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – H-группа. Тогда алгебра когомологий $H^*(M, k)$ – **алгебра Хопфа.**

Структурная теорема для алгебр Хопфа

Пусть $V^\bullet$ – градуированное векторное пространство. Обозначим за $\operatorname{Sym}_{gr}(V)$ тензорное произведение $\operatorname{Sym}^*(V^{\text{even}}) \otimes \Lambda^*(V^{\text{odd}})$ с естественной градуировкой. На $\operatorname{Sym}_{gr}(V)$ задана структура градуированной коммутативной алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Свободная коммутативная** алгебра есть алгебра полиномов. **Свободная градуированная алгебра** есть $Sym_{gr}(V^\bullet)$, где $V^\bullet$ – градуированное векторное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированная алгебра конечного типа** есть алгебра, градуированная $i \geqslant 0$, у которой все градуированные пространства конечномерны.

Теорема Хопфа: Пусть A есть градуированная алгебра Хопфа конечного типа над полем k характеристики 0. **Тогда A – свободная (градуированная) k-алгебра.**

Примитивные элементы в биалгебрах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Элемент x биалгебры называется **примитивным**, если $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.

Мы сначала докажем теорему Хопфа для алгебр Хопфа, (мультипликативно) порожденных примитивными элементами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – алгебра Хопфа, $P \subset A$ – пространство примитивных элементов. Рассмотрим естественный мультипликативный гомоморфизм $\operatorname{Sym}_{gr}(P) \xrightarrow{\psi} A$. Говорится, что A **свободна вплоть до степени** k, если $\bigoplus^{i \leqslant k} \operatorname{Sym}^i_{gr}(P) \xrightarrow{\psi} A$ вложение.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из следующей леммы **немедленно вытекает теорема Хопфа, для алгебр, порожденных примитивными элементами.**

ЛЕММА: Пусть A – алгебра Хопфа, свободная вплоть до степени k. **Тогда A свободна вплоть до степени $k+1$.**

Структурная теорема для алгебр Хопфа, порожденных примитивными элементами

ЛЕММА: Пусть A – алгебра Хопфа (или даже биалгебра), свободная вплоть до степени k. **Тогда A свободна вплоть до степени $k+1$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $\{x_i\}$ – какой-то базис в пространстве примитивных элементов P. Рассмотрим полиномиальное соотношение степени $k+1$, $Q(x_1, ..., x_n) = 0$, и представим его в виде полинома от x_1 с коэффициентами, которые будут полиномами от $x_2, ..., x_n$: $Q = Q_m x_1^m + Q_{m-1}x_1^{m-1} + ... + Q_0$. Поскольку $\psi : \bigoplus^{i\leqslant k} \operatorname{Sym}^i_{gr}(P) \xrightarrow{\psi} A$ вложение, имеем

$$\Delta(Q) = Q \otimes 1 + 1 \otimes Q + R,$$

где $R \in \mathfrak{A} := \left(\bigoplus^{i\leqslant k} \operatorname{Sym}^i_{gr}(P)\right) \otimes \left(\bigoplus^{i\leqslant k} \operatorname{Sym}^i_{gr}(P)\right)$.

Шаг 2: Каждый элемент $\mathfrak{A}$ представляется как сумма мономов вида $\lambda\otimes\mu$, где λ, μ – мономы от x_i. Обозначим за $\Pi : \mathfrak{A} \longrightarrow x_1 \otimes \left(\bigoplus^{i\leqslant k} \operatorname{Sym}^i_{gr}(P)\right)$ проекцию на сумму всех мономов вида $x_1 \otimes \mu$. Поскольку $\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$, имеем $\Delta(x_1^m) = (x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1)^m$, **что дает $\Pi(\Delta(x_1^m)) = m x_1 \otimes x_1^{m-1}$.**

Структурная теорема для алгебр Хопфа, порожденных примитивными элементами (продолжение)

Шаг 3: Пусть $\Pi(R) = x_1 \otimes R_0$. Поскольку $Q = 0$ в A, его компонента R_0 тоже равна нулю. **В силу шага 2,**

$$0 = x_1 \otimes R_0 = \sum_{i=1}^{m} m x_1^{m-1} Q_m$$

где Q_i – полиномы, определенные в шаге 1. Значит, все $Q_i = 0$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: На шаге 3 **используется $\operatorname{char} k = 0$.**

Доказательство теоремы Хопфа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Идеал аугментации Z в алгебре Хопфа есть ядро отображения коединицы $\varepsilon: \ A \longrightarrow k$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Условие коединицы дает $x = [\varepsilon \otimes \operatorname{Id}_A](\Delta(x))$ и $x = [\operatorname{Id}_A \otimes \varepsilon](\Delta(x))$, то есть

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \mod (Z \otimes Z)$$

Доказательство теоремы Хопфа. Шаг 1: Рассмотрим фильтрацию алгебры A степенями Z^i идеала аугментации Z **(“адическую фильтрацию”)**, и присоединенную градуированную алгебру $A_{gr} := \bigoplus_i Z^i/Z^{i+1}$. **В силу предыдущего замечания, $\Delta(Z^p) \subset \bigoplus_{i+j=p} Z^i \otimes Z^j$.**

Шаг 2: Мы получили, что все операции, определенные на алгебре Хопфа, совместимы с фильтрацией степенями Z (проверьте). Значит, **A_{gr} – тоже алгебра Хопфа**.

Шаг 3: Алгебра A_{gr} мультипликативно порождена Z^1/Z^2 (это общее свойство присоединенных градуированных алгебр по адической фильтрации).

Доказательство теоремы Хопфа (окончание)

Шаг 4: Поскольку $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1 \mod (Z \otimes Z)$, все элементы Z^1/Z^2 примитивны. В силу шага 3, A_{gr} **порождена примитивными элементами.**

Шаг 5: По теореме, доказанной выше, A_{gr} свободно порождена $\{x_i\}$, где x_i – базис в пространстве примитивных элементов A_{gr}. Выберем для каждого из x_i представитель $\tilde{x}_i$ в A той же четности. Поскольку между x_i нет соотношений в A_{gr}, **между $\tilde{x}_i$ нет соотношений и в A. Осталось доказать, что $\tilde{x}_i$ порождают A.**

Шаг 6: Размерности градуированных компонент A^p и A^p_{gr} равны (здесь **идет речь о градуировке, которая была изначально задана на A и индуцированной градуировке на A_{gr}**). Пусть $\{y_i\}$ есть набор мономов в A_{gr}, порождающих заданную компоненту A^p_{gr}, а $\{\tilde{y}_i\}$ – соответствующие элементы A^p. Тогда $\{y_i\}$ – базис в A^p_{gr}, а $\{\tilde{y}_i\}$ – линейно независимые элементы в пространстве A^p той же размерности. Следовательно, **мономы $\{\tilde{y}_i\}$ порождают A^p.** ■

Применения теоремы Хопфа

СЛЕДСТВИЕ: Алгебра $H^*(G, \mathbb{Q})$ когомологий группы Ли – **грассманова алгебра, порожденная нечетномерными образующими.**

СЛЕДСТВИЕ: Алгебра $H^*(\Omega M, \mathbb{Q})$ когомологий пространства петель любого конечного клеточного пространства M – **свободная суперкоммутативная алгебра.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Доказательство структурной теоремы **нигде не использует аксиому антипода.** Таким образом, **теорема Хопфа верна для любой биалгебры конечного типа**, в частности, **для алгебры когомологий H-пространства.**

Алгебра когомологий компактной группы

ЗАМЕЧАНИЕ: Любая компактная группа Ли **допускает риманову метрику, инвариантную и справа и слева** ("биинвариантную")

ЗАМЕЧАНИЕ: Воспользовавшись усреднением, мы получим, что что любой класс когомологий компактной группы Ли G можно представить формой, которая инвариантна и справа и слева ("биинвариантна") Написав дифференциал де Рама явно ("формула Картана"), мы получим, что биинвариантные формы замкнуты и ортогональны точным, то есть вкладываются в когомологии. **Это отождествляет алгебру когомологий с алгеброй биинвариантных форм на G.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Для компактной подгруппы $H \subset G$, любая биинвариантная форма на H продолжается до биинвариантной формы на G стандартным образом (продолжением нулем на ортогональное дополнение, левыми переносами и усреднением). **Это дает гомоморфизм алгебр когомологий $H^*(H, \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(G, \mathbb{R})$.**

Алгебра когомологий $U(n)$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Алгебра когомологий $H^*(U(n),\mathbb{Q})$ – **грассманова алгебра, порожденная образующими в размерностях $1,3,5,...,2n-1$.**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $U(n)$ – группа Ли, ее алгебра когомологий – алгебра Хопфа. Поэтому $H^*(U(n-1))$ **– свободная алгебра с образующими в нечетных степенях.** Применив индукцию, мы можем считать, что $H^*(U(n-1))$ **– свободная супералгебра с образующими в размерностях $1,3,5,...,2n-3$.**

Шаг 2: Группа $U(n)$ расслоена над S^{2n-1} со слоем $U(n-1)$, а форма $\xi_{2n-1}\in H^*(U(n))$, полученная как обратный образ формы объема на сфере, замкнута. Поскольку ξ_{2n-1} зануляется на векторах, касательных к $U(n-1)$, между ней и формами из образа $H^*(U(n-1))$ нет никаких соотношений. Поэтому $H^*(U(n))$ содержит свободную алгебру A^*, порожденную образующими $H^*(U(n-1))$ и ξ_{2n-1}. Написав клеточное разбиение, связанное с расслоением $U(n)\xrightarrow{U(n-1)} S^{2n-1}$, легко убедиться, что размерность A^* равна $\dim H^*(U(n))$, что дает $A^*=H^*(U(n))$. ■

Многообразия Грассмана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $\mathrm{Gr}(n,m)$ **многообразие Грассмана** n-мерных плоскостей в m-мерном пространстве над k, $k=\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, и пусть B_{fun} обозначает **фундаментальное n-мерное расслоение над $\mathrm{Gr}(n,m)$** (над каждой точкой $x\in \mathrm{Gr}(n,m)$ висит соответствующее n-мерное пространство $V_x\subset k^m$).

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B_{triv} – тривиальное m-мерное расслоение над грассманианом $\mathrm{Gr}(n,m)$, а B'_{fun} – расслоение, сопоставляющее точке $x\in \mathrm{Gr}(n,m)$ фактор k^m по V_x. Тогда **имеет место точная последовательность $0\longrightarrow B'_{\mathrm{fun}}\longrightarrow B_{triv}\longrightarrow B_{\mathrm{fun}}\longrightarrow 0$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – n-мерное векторное расслоение над топологическим пространством X такое, что $B\oplus B'$ тривиально, для $\dim B'=m-n$. Отождествив все слои $B\oplus B'$, получим, что **каждая точка $x\in X$ задает плоскость $\varphi(x)$ в k^m.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – n-мерное расслоение над пространством X такое, что $B\oplus B'$ тривиально, для $\dim B'=m-n$. **Тогда существует отображение $\varphi:\ X\longrightarrow \mathrm{Gr}(n,m)$ такое, что $\varphi^* B_{\mathrm{fun}}\cong B$.** ■

Грассманиан $\mathrm{Gr}(n,\infty)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим естественные вложения

$$\mathrm{Gr}(n,m) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(n,m+1) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(n,m+2) \hookrightarrow ...,$$

и пусть $\mathrm{Gr}(n) := \mathrm{Gr}(n,\infty)$ **обозначает объединение всех этих пространств** (то есть прямой предел клеточных комплексов). Это пространство n-мерных плоскостей в k^∞, где k^∞ обозначает $\bigoplus_{i=0}^\infty k$.

ТЕОРЕМА: Пусть B – расслоение над многообразием M. **Тогда $B \oplus B'$ тривиально, для какого-то расслоения B' над M.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите эту теорему самостоятельно (доказательство аналогично теореме Уитни об иммерсии многообразия в $\mathbb{R}^n$).

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – n-мерное расслоение на многообразии M. **Тогда существует отображение $\varphi: M \longrightarrow \mathrm{Gr}(n)$ такое, что $B = \varphi^* B_{\mathsf{fun}}$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Воспользовавшись теоремой о вложении расслоения в тривиальное, получим тривиализацию $B \oplus B'$, для какого-то расслоения B' над M. Соответствующее отображение $\varphi: M \longrightarrow \mathrm{Gr}(n,m)$ построено выше. ■

Классифицирующие пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – топологическая группа, X – топологическое пространство. **Главное G-расслоение над X** есть топологическое пространство E, снабженное свободным действием G, таким, что $E/G = X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Классифицирующее пространство** для топологической группы G есть пространство BG, снабженное главным G-расслоением G_{fun}, тотальное пространство которого стягиваемо.

ТЕОРЕМА: Пусть BG – классифицирующее пространство для группы G. Тогда **классы гомотопии отображений $X \longrightarrow BG$ взаимно однозначно соответствуют классам изоморфизма главных G-расслоений:** для каждого G-расслоения Y существует (единственное до гомотопии) отображение $X \xrightarrow{\varphi} BG$ такое, что $\varphi^* G_{\mathsf{fun}} \cong Y$.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $Y \longrightarrow X$ – главное G-расслоение. Рассмотрим произведение $Y \times E$ с диагональным действием G как расслоение над $X \times E$. **Как G-расслоение, $Y \times E \longrightarrow X \times E$ гомотопически эквивалентно $Y \longrightarrow X$.** Отображение проекции на второй аргумент дает $X = Y/G \sim (Y \times E)/G \longrightarrow BG$, что приводит к искомому отображению $X \xrightarrow{\varphi} BG$.

Классифицирующие пространства (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть BG – классифицирующее пространство для группы G. Тогда **классы гомотопии отображений $X \longrightarrow BG$ взаимно однозначно соответствуют классам изоморфизма главных G-расслоений:** для каждого G-расслоения Y существует (единственное до гомотопии) отображение $X \xrightarrow{\varphi} BG$ такое, что $\varphi^* G_{\mathsf{fun}} \cong Y$.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $Y \longrightarrow X$ – главное G-расслоение. Рассмотрим произведение $Y \times E$ с диагональным действием G как расслоение над $X \times E$. **Как G-расслоение, $Y \times E \longrightarrow X \times E$ гомотопически эквивалентно $Y \longrightarrow X$.** Отображение проекции на второй аргумент дает $X = Y/G \sim (Y \times E)/G \longrightarrow BG$, что приводит к искомому отображению $X \xrightarrow{\varphi} BG$.

Шаг 2: Пусть даны отображения $X \xrightarrow{\varphi_i} BG$, $i = 0, 1$. Получаем расслоение $(Y \times \{0,1\}) \times E \xrightarrow{\check{\Phi}} (X \times \{0,1\}) \times E$, факторизация по G и проекция на второй аргумент дает φ_i. Поскольку φ_i индуцирует одно и то же расслоение, $\check{\Phi}$ можно продолжить до $(Y \times [0,1]) \times E \xrightarrow{\Phi} (X \times [0,1]) \times E$. Факторизуя по G и проектируя на $E/G = BG$, **получаем искомую гомотопию $(Y \times [0,1]) \times E \longrightarrow BG$.** ■

Классифицирующее пространство для $U(n)$

Отныне мы будем работать над $\mathbb{C}$, и наше поле $k = \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА:
$Gr(n, \mathbb{C})$ **есть классифицирующее пространство для** $U(n)$**.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть E_n – множество всех последовательностей $\{x_1, ..., x_n\} \subset k^\infty$ из n ортонормированных векторов в $\mathbb{C}^\infty$ **("Многообразие Штифеля")**. Очевидно, $E/GL(n) = \mathrm{Gr}(n)$. **Осталось убедиться, что** E_n **стягиваемо.**

Шаг 2: Пусть $Y \longrightarrow X$ локально тривиальное расслоение, слой которого стягиваем, и база тоже стягиваема. **Тогда** Y **стягиваемо** (докажите это).

Шаг 3: Обозначим за $S^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$ единичную сферу в $\mathbb{C}^\infty$. **Тогда** E_n **расслоено над** S^n **со слоем** E_{n-1}**.** Для доказательства стягиваемости E_n **осталось убедиться, что** S^∞ **стягиваемо, и применить индукцию.**

Классифицирующее пространство для $U(n)$ (продолжение)

Шаг 4: Проще убедиться, что $\mathbb{C}^\infty\backslash 0$ стягиваемо (эти пространства, очевидно, гомотопически эквивалентны). Выберем в $\mathbb{C}^\infty$ базис, пронумерованный $\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$. Рассмотрим отображение $N: \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$, переводящее i-й вектор базиса в $i+1$-й. Тогда $t\,\mathrm{Id} + (1-t)N$ переводит $\mathbb{C}^\infty\backslash 0$ в себя для любого $t \in \mathbb{R}$. **Это задает гомотопию тождественного отображения $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^\infty\backslash 0}$ и N.**

Шаг 5: Поскольку вектор $(1, 0, 0, 0, ...)$ не принадлежит образу N, из него можно спроектировать на аффинное пространство $A = \{1/2, t_1, t_2, ...\}$, получив гомотопию Id и отображения $\mathbb{C}^\infty\backslash 0 \longrightarrow A$. **Поскольку A стягиваемо, это отображение гомотопно тривиальному.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Классы гомотопии главных $U(n)$ расслоений это то же самое, что классы гомотопии векторных n-мерных расслоений над $\mathbb{C}$ **(проверьте это).**

СЛЕДСТВИЕ: Классы гомотопии n-мерных расслоений суть гомотопические классы отображения в $\mathrm{Gr}(n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали это над $\mathbb{C}$; доказательство над $\mathbb{R}$ остается как упражнение.

Бесконечномерный грассманиан

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $X_\infty = \bigcup X_i$ – счетное объединение стягиваемых клеточных пространств. **Тогда X_∞ тоже стягиваемо.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Выберем базис $x_0, x_1, ...,$ в $\mathbb{C}^\infty$, и пусть $N: \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$ определено как выше, $N(x_i) = x_{i+1}$. Рассмотрим вложение $Gr(n,\infty) \hookrightarrow Gr(n+1,\infty)$, переводящее подпространство $L \subset \mathbb{C}^\infty$ в $\langle x_0, N(L)\rangle$. Объединение $\bigcup_n Gr(n,\infty)$ называется **бесконечномерный грассманиан**, и обозначается BU.

ТЕОРЕМА:
BU есть классифицирующее пространство для $U = \bigcup_n U(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим вложения $E_1 \subset E_2 \subset ...$ полученные как выше, $\{\zeta_1, ..., \zeta_m\} \in \mathbb{C}^\infty$ переводится в $\{x_0, N(\zeta_1), ..., N(\zeta_m)\}$, и пусть E_∞ есть объединение всех E_i. По построению, $BG = E_\infty/U$, значит, **достаточно убедиться, что E_∞ стягиваемо.** Это вытекает из предыдущего упражнения. ■

Стабильная эквивалентность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторные расслоения B_1 и B_2 называются **стабильно эквивалентными**, если $B_1 \oplus U_1 \cong B_2 \oplus U_2$, где U_i – тривиальные векторные расслоения.

ТЕОРЕМА: Пусть X – конечное клеточное пространство. Тогда **классы гомотопии отображений $X \longrightarrow BG$ биективно соответствуют классам стабильной эквивалентности векторных расслоений.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Проверьте самостоятельно. ∎

Когомологии BU

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу периодичности Ботта, $BU = \Omega U$, значит, BU **есть H-группа, и можно применить теорему Хопфа, чтобы узнать ее когомологии.** Поскольку для теоремы Хопфа достаточно только коумножения (и коединицы) в когомологиях, для того же самого результата **достаточно построить на BU структуру H-пространства.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Рассмотрим отображение $V: \mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$, переводящее базисные вектора x_i первого пространства в x_{2i}, а базисные вектора второго пространства в x_{2i+1}. Тогда $L, L' \longrightarrow V(L, L')$ **задает структуру H-пространства** на бесконечном грассманиане BU.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Нечего тут доказывать. ■

СЛЕДСТВИЕ:
$H^*(BU, \mathbb{Q})$ – **свободная суперкоммутативная алгебра.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Нетрудно написать клеточное разложение для грассманиана, все клетки которого **("клетки Шуберта")** будут четными. Значит, $H^*(BU)$ коммутативна.

Когомологии BU (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: $H^*(BU, \mathbb{Q})$ **– свободная полиномиальная алгебра, порожденная примитивными классами** $ch_1, ch_2, ...$ **во всех четных степенях.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим фундаментальное расслоение $E \longrightarrow BU$ со слоем U. Когомологии U нам ведомы: это свободная грассманова алгебра, порожденная образующими во всех нечетных степенях. Поскольку E стягиваемо, для каждой образующей ξ_{2i-1} в $H^{2i1}(U)$ должен существовать класс $ch_{2i} \in H^{2i}(BU)$, который будет образом соответствующего дифференциала спектральной последовательности.

Что между такими классами нет соотношений, это следует из теоремы Хопфа. ■

Классы Черна: аксиоматическое определение

Классы Черна суть классы $c_i(B) \in H^{2i}(B)$, $i = 0, 1, 2, ...$, определенные для любого векторного расслоения B на клеточном пространстве X, и удовлетворяющие следующим аксиомам.

1. $c_0(V) = 1$.

2. **функториальность:** если $f: X \longrightarrow Y$ непрерывно, то $f^* c_i(B) = c_i(f^* B)$.

3. **Формула Уитни:** $c_*(B \oplus B') = c_*(B) c_*(B')$, где $c_*(B) = \sum_i c_i(B)$.

4. Если $\mathcal{O}(i)$ – стандартное расслоение на проективном пространстве, то $c_1(\mathcal{O}(1)) = [H]$, где $[H]$ – фундаментальный класс гиперплоскости, а для всех $i > 0$, $c_i(\mathcal{O}(1)) = 0$.

Характер Черна и классы Черна: явная конструкция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – векторное расслоение на X, а $\varphi: X \longrightarrow BU(n) \subset BU$ – соответствующее отображение. **i-й характер Черна $ch_i(B)$** есть класс когомологий $ch_i(B) \in H^{2i}(X)$, полученный как $\varphi^*(ch_i)$, где ch_i – примитивная образующая $H^*(BU)$, построенная только что.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **k-й класс Черна** расслоения B определяется как компонента градуировки $2k$ в сумме $e^{\sum_i ch_i(B)}$. В частности, $c_1(B) = ch_1(B)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Классы Черна целые (если выбрать правильную нормализацию ch_i). **Над $\mathbb{Z}$, когомологии BU порождены классами Черна фундаментального расслоения B_{fun}.**

ЗАМЕЧАНИЕ: $BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$, ибо бесконечномерная сфера S^∞ расслоена над $\mathbb{C}P^\infty$ со слоем $U(1)$. Алгебра $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$ изоморфна $\mathbb{C}[t]$, где t есть фундаментальный класс гиперплоскости.

СЛЕДСТВИЕ: Первый класс Черна голоморфного линейного расслоения $\mathcal{O}(1)$, полученного из вложения X в $\mathbb{C}P^n$, равен **фундаментальному классу дивизора гиперплоского сечения.**

Характер Черна и классы Черна: явная конструкция (продолжение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим структуру H-пространства на BU, построенную выше: $\mu : BU \times BU \longrightarrow BU$. Пусть B_1, B_2 – векторные расслоения на X, полученные из отображений $\varphi_i : X \longrightarrow BU$. Тогда $B_1 \oplus B_2$ получено из $\varphi_1 \times \varphi_2 \circ \mu : X \longrightarrow BU$. Мы получили, что **коумножение в $H^*(BU)$ согласовано с взятием прямой суммы расслоений.**

СЛЕДСТВИЕ: **Характер Черна аддитивен:** $ch_i(B \oplus B') = ch_i(B) + ch_i(B')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\mu^*(ch_i) = 1 \otimes ch_i + ch_i \otimes 1$, поскольку ch_i примитивны. Значит, $ch_i(B \oplus B') = (\varphi \times \varphi')(1 \otimes ch_i + ch_i \otimes 1) = \mathrm{ch}_i(B) + ch_i(B')$. ■

СЛЕДСТВИЕ: (формула Уитни)
Обозначим за $c_*(B) \in H^*(X)$ тотальный класс Черна расслоения, то есть $\sum_{i \geqslant 0} c_i(B)$, где $c_0(B) = 1$. **Тогда $c_*(B \oplus B') = c_*(B)c_*(B')$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $e^{a+b} = e^a e^b$. ■