Следы сингулярных модулей

Дронев Михаил Владимирович

Факультет математики ВШЭ

24 декабря 2024 г.

План

1. Сингулярные модули
2. Рекурренты для следов
3. Доказательство первой рекурренты
4. Доказательство второй рекурренты
5. Формы веса $1/2$ и $3/2$
6. Высшие следы
7. Случай групп Фрике

Сингулярные модули

Биголоморфизм между $\mathbb{H}/\Gamma$ и $\mathbb{CP}^1$ задаётся j–инвариантом

$$j(\tau) \coloneqq \frac{E_4^3(\tau)}{\Delta(\tau)} = q^{-1} + 744 + \cdots . \quad J(\tau) \coloneqq j(\tau) - 744 .$$

Каковы значения j для конкретных τ? Например,

$$j\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \,, j(i) = 1728 \,, j\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{3 \pm 1}\right) = \frac{-191025 \mp 85995\sqrt{5}}{2} .$$

Пусть $\mathcal{Q}_d$ (при натуральном d с $d \equiv 0, 3 \pmod 4$) — множество положительно определённых квадратичных форм $[a, b, c](X, Y) \coloneqq aX^2 + bXY + cY^2$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ с дискриминантом $b^2 - 4ac = -d$, а α_Q для такой формы Q — такое (единственное) $\tau \in \mathbb{H}$, что $Q(\tau, 1) = 0$.
Сингулярные модули — это $j(\alpha_Q)$ для всяких α_Q с $Q \in \mathcal{Q}_d$ для любого d.

Свойства сингулярных модулей

Для α_{Q} выше с $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}) = 1$ (т.е. примитивным Q) число $\mathrm{j}(\alpha_{\mathrm{Q}})$ является алгебраически целым, степени $\mathrm{h}(-\mathrm{d})$ (число примитивных классов эквивалентности в $\mathcal{Q}_{\mathrm{d}}/\Gamma$) над $\mathbb{Q}$, а расширение $\mathbb{Q}(\alpha_{\mathrm{Q}}, \mathrm{j}(\alpha_{\mathrm{Q}}))/\mathbb{Q}(\alpha_{\mathrm{Q}})$ (если $-\mathrm{d}$ — дискриминант поля $\mathbb{Q}(\alpha_{\mathrm{Q}})$, а не (как в общем случае) квадратное кратное его) — максимальное неразветвлённое абелевео расширение поля $\mathbb{Q}(\alpha_{\mathrm{Q}})$ (и оно тоже степени $\mathrm{h}(-\mathrm{d})$).

У эллиптической кривой (над $\mathbb{C}$) есть нескалярный эндоморфизм $\Leftrightarrow$ её j–инвариант есть сингулярный модуль.

Следы

С весами $w_Q := |\Gamma_Q|$ (которые будут 1, 2 или 3) введём число классов Кронекера–Гурвица $H(d)$ и функцию следа $t(d)$:

$$H(d) := \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d/\Gamma} \frac{1}{w_Q}, \quad t(d) := \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d/\Gamma} \frac{J(\alpha_Q)}{w_Q}.$$

Например, $H(3) = 1/3$ и $t(3) = -248$, $H(4) = 1/2$ и $t(4) = 492$.
С $\theta_1(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}$, $E_4(\tau) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n$ и $\eta(\tau) := q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ построим (мероморфную) модулярную форму веса 3/2 (над $\Gamma_0(4)$):

$$g(\tau) := \theta_1(\tau)\frac{E_4(4\tau)}{\eta(4\tau)^6} = q^{-1} - 2 + 248q^3 - 492q^4 + \cdots.$$

Обозначим за $B(d)$ коэффициент при q^d в разложении Фурье формы $g(\tau)$.
Будем доказывать следующее утверждение: для любого натурального d с $d \equiv 0, 3 \pmod 4$

$$t(d) = -B(d).$$

Рекуррентные соотношения на $B(d)$

С операцией $(\sum_n a_n q^n) \mid U_4 := \sum_n a_{4n} q^n$ и функцией $\theta(\tau) := \sum_n q^{n^2}$ функции $(g\theta) \mid U_4$ и $4[g,\theta]_1 \mid U_4 = (g'(\tau)\theta(\tau) - 3g(\tau)\theta'(\tau)) \mid U_4$ есть (голоморфные) модулярные формы весов 2 и 4 соответственно. Отсюда $g\theta \mid U_4 = 0$ и $[g,\theta]_1 \mid U_4 = \lambda E_4$, и (с $\sigma_3(0) := 1/240$) для $n \geq 0$ имеем

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}} B(4n - r^2) = 0\,, \quad \sum_{r>0} r^2 B(4n - r^2) = \sigma_3(n)\,.$$

Так как эти соотношения определяют $g(\tau)$ однозначно, то достаточно доказать аналогичные соотношения для $t(d)$ (см. части 3 и 4 ниже). Первое из них (при $n \geq 1$):

$$\sum_{|r|<2\sqrt{n}} t(4n - r^2) = \begin{cases} -4 & n \text{ — квадрат} \\ 2 & 4n+1 \text{ — квадрат} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

Модулярный многочлен

Пусть $\mathcal{M}_n$ — множество матриц в $M_2(\mathbb{Z})$ с определителем n. Рассмотрим функцию

$$\Psi_n(X,\tau) = \prod_{M\in\Gamma\backslash\mathcal{M}_n} (X - j(M\tau)) .$$

Коэффициент при X^k есть голоморфная функция на $\mathbb{H}/\Gamma$ с не более чем экспоненциальным ростом на бесконечности; поэтому — из $\mathbb{C}[j(\tau)]$. Целые коэффициенты в разложении Фурье у $j(\tau)$ дают $\Psi_n \in \mathbb{Z}[\zeta_n][X]((q^{1/n}))$, а учёт действия Галуа на ζ_n даёт $\Psi_n \in \mathbb{Z}[X]((q)) = \mathbb{Z}[X]((j^{-1}))$. Вместе с утверждением ранее получаем, что существует т.н. модулярный многочлен $\Psi_n \in \mathbb{Z}[X, Y]$, что $\Psi_n(X, j(\tau))$ равно $\prod_{M\in\Gamma\backslash\mathcal{M}_n}(X - j(M\tau))$. Диагональное ограничение $\Psi_n(X, X)$ при неквадратном n оказывается ненулевым и приведённым (через подстановку $X = j(\tau)$ и разложение Фурье). Поэтому $j(\alpha_Q)$ является алгебраически целым над $\mathbb{Q}$.

Равенство Кронекера

Пусть n — не квадрат. С $\mathcal{H}_d(X) := \prod_{Q\in\mathcal{Q}_d/\Gamma}(X - j(\alpha_Q))^{1/w_Q}$ из-за соответствия между неподвижными точками для матриц из $\mathcal{M}_n$ и корней α_Q для $\mathcal{Q}_{r^2-4n}$, $|r| < 2\sqrt{n}$, имеем

$$\Psi_n(X, X) = \mathrm{const} \cdot \prod_{|r|<2\sqrt{n}} \mathcal{H}_d(X)\,.$$

Так как $\mathcal{H}_d(j(\tau)) = q^{-H(d)}(1 + t(d)q + O(q^2))$ и

$$\begin{aligned}\Psi_n(j(\tau), j(\tau)) &= \prod_{ad=n}\prod_{b=1}^{d}\left(j(\tau) - j\left(\frac{a\tau+b}{d}\right)\right) = \\ &= \prod_{ad=n}(q^{-d} - q^{-a})(1 + O(q^{>1})) = \\ &= \prod_{ad=n}\pm q^{-\max\{a,d\}}(1 - \delta_{|a-d|,1}q + O(q^2))\,,\end{aligned}$$

то получаем первое рекуррентное соотношение на t(d) выше (с ограничением на n).

Конец доказательства первого соотношения

Для квадратного n многочлен $\Psi_n(X, Y)$ делится на $\Psi_1(X, Y) = X - Y$, поэтому разлагаем обе части вместо равенства такого:

$$\left.\frac{\Psi_n(X, Y)}{\Psi_1(X, Y)}\right|_{X=Y} = C \cdot \left(\prod_{|r|<2\sqrt{n}} \mathcal{H}_{4n-r^2}(X) \Big/ \prod_{|r|<2} \mathcal{H}_{4-r^2}(X) \right).$$

Параллельно получаем соотношение на $H(d)$:

$$\sum_{|r|<2\sqrt{n}} H(4n - r^2) = \sum_{d|n} \max\{d, n/d\} + \begin{cases} 1/6 & n \text{ — квадрат} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

Второе рекуррентное соотношение

Второе доказываемое соотношение — это

$$\sum_{1\le r<2\sqrt{n}} r^2 t(4n-r^2) = -240\sigma_3(n) + \begin{cases} -8n & n \text{ — квадрат} \\ 4n+1 & 4n+1 \text{ — квадрат} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

Введём функцию $\Lambda_d(\tau) := \frac{d}{d\tau}\ln \mathcal{H}_d(j(\tau)) = \sum_{Q\in\mathcal{Q}_d/\Gamma} \frac{1}{w_Q}\frac{j'(\tau)}{j(\tau)-j(\alpha_Q)}$. Это — мероморфная модулярная форма веса 2, регулярная на бесконечности, имеющая полюса в $\alpha_Q, Q\in\mathcal{Q}_d$ с вычетом 1. Аналогичным образом для неквадратного n характеризуются обе части равенства ниже (что и доказывает его):

$$\frac{E_4(\tau)E_6(\tau)}{\Delta(\tau)} \sum_{M\in\Gamma\backslash\mathcal{M}_n} \frac{(E_4 \mid M)(\tau)}{j(\tau)-j(M\tau)} = \frac{1}{4\pi i}\sum_{|r|<2\sqrt{n}} (r^2-n)\Lambda_{4n-r^2}(\tau).$$

Второе рекуррентное соотношение

Так как $-\frac{1}{2\pi i}\Lambda_d(\tau) = H(d) + t(d)q + O(q^2)$, то правая часть имеет коэффициентном при q выражение $\frac{1}{2}\sum_{|r|<2\sqrt{n}}(n - r^2)t(4n - r^2)$.
У левой части коэффициент при q таков:
$\sum_{\substack{ad=n\\ a<d}} a^3(240\delta_{a,1}\sigma_3(n) + \delta_{a,d-1}) + \sum_{\substack{ad=n\\ a>d}} -a^3\delta_{a,d+1}$, отсюда получаем второе соотношение. Для квадратных n — аналогично (и теорема доказана). Для H(d) получим

$$\sum_{|r|<2\sqrt{n}}(n - r^2)H(4n - r^2) = \sum_{d|n}\min\{d, n/d\}^3 - \begin{cases} n/2 & n \text{ — квадрат} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

Формы полуцелого веса

Пространство $M^!_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ состоит из почти голоморфных форм $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ веса $k+\frac{1}{2}$, т.е.

- f голоморфна на $\mathcal{H}$
- $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{-4}{d}\right)^{-k-\frac{1}{2}}(cz+d)^{k+\frac{1}{2}} f(\tau)$ для $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4)$
- f мероморфна на каспах для $\Gamma_0(4)$

Плюс–подпространство $M^!_{k+\frac{1}{2}}$ состоит из форм отсюда с разложением вида $\sum_{\substack{n\gg 0 \\ (-1)^k n \equiv 0,1 \pmod 4}} c_n q^n$. Например, содержит форму $g(\tau)$ (при $k=1$) или $\theta(\tau)$ (при $k=0$).

Формы f_d и g_D

В $M^!_{\frac{1}{2}}$ и $M^!_{\frac{3}{2}}$ можно взять базисы, состоящие из форм $f_d, d \geq 0, d \equiv 0, 1 \pmod 4$ и $g_D, d > 0, d \equiv 0, 3 \pmod 4$ однозначно определённые разложениями в бесконечности

$$f_d(\tau) = q^{-d} + O(q)\,, \quad g_D(\tau) = q^{-D} + O(q)\,.$$

Например,

$$\begin{aligned} f_0 &= \theta = 1 + 2q + 2q^4 + \dots\,, \\ f_3 &= [\theta(\tau), E_{10}(4\tau)]/\Delta(4\tau) = q^{-3} - 248q + 26572q^4 + \dots\,, \\ g_1 &= g = q^{-1} - 2 + 248q^3 + \dots\,, \\ g_4 &= q^{-4} - 2 - 26572q^3 + \dots\,. \end{aligned}$$

Формулы произведения

По форме $f = \sum_n a(n)q^n \in M^!_{\frac{1}{2}}$ с целыми $a(n)$ можно построить мероморфную форму целого веса (с некоторым характером) с целыми коэффициентами и ведущим коэффициентом 1, и полюсами и нулями только на каспах или точках вида α_Q

$$\Psi(\tau) = q^{-[q^0](f(q)\sum_k H(k)q^k)} \prod_n (1-q^n)^{a(n^2)};$$

эта конструкция задаёт биекцию между указанными множествами форм. Дополнительно, вес Ψ равен $a(0)$, и порядок его на α_Q (с примитивным Q дискриминанта D) равен $\sum_{d>0} a(Dd^2)$.
Функция $\mathcal{H}_d(\tau)$ входит во второе множество выше, и из описания нулей следует, что ему соответствует форма вида $q^{-d} + O(q)$, т.е. f_d. Отсюда

$$q^{-H(d)}(1 + t(d)q + O(q^2)) = \mathcal{H}_d(t) = q^{-H(d)} \prod_{n>0} (1-q^n)^{[q^{n^2}]f_d},$$

и $t(d) = -[q^1]f_d$ — получили транспонированную формулу для следов.

Двойственность между f_d и g_D

Докажем, что коэффициентны форм f_d и g_D связаны соотношением

$$[q^D]f_d = -[q^d]g_D\,;$$

это объяснит наличие двух формул для следов. Рассмотрим функцию $F(\tau_1,\tau_2) := \frac{f_0(\tau_1)g_4(\tau_2)+f_3(\tau_1)g_1(\tau_2)}{j(4\tau_1)-j(4\tau_2)}$. При $\Im\tau_1, \Im\tau_2 > \frac{1}{4}$ полюса (простые) у неё есть только при $\tau_1-\tau_2 \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}$, там же находятся полюса у $F_0(\tau_1,\tau_2) := \frac{q_1^4+q_1q_2^3}{q_1^4-q_2^4}$, с теми же вычетами (при фиксированных τ_2). Поэтому $(F-F_0)(q_1,q_2)$ голоморфна около $(0,0)$ и есть разложение $F = F_0 + \sum_{D>0,d\geq 0} C(D,d)q_1^D q_2^d$. В частичном разложении F по q_2 получим формы f_d как коэффициентны, в разложении по q_1 — формы $-g_D$; отсюда и соотношение.
Другой способ доказательства: $(f_d g_D) \mid U_4$ — почти голоморфная форма веса 2. Так как $\frac{1}{2\pi i}(j^m(\tau))' = -mq^{-m} + \ldots + 0q^0 + \ldots$ тоже веса 2, то $(f_d g_D) \mid U_4 = P'(j)$ для некоторого $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ будет голоморфной формой веса 2 (т.е. нулём) с тем же постоянным членом. Поэтому $[q^0](f_d g_D) = 0$.

Высшие следы

Для каждого $m > 0$ есть единственная модулярная функция $J_m(\tau)$ с разложением $q^{-m} + O(q)$; она выражается как многочлен степени m от $j(\tau)$, поэтому выражение ниже можно назвать m–ой функцией следа:

$$t_m(d) := \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d/\Gamma} \frac{J_m(\alpha_Q)}{w_Q}.$$

Для построения аналогов форм f_d и g_D понадобится следующие операторы Гекке (здесь $h = \sum_n a(n)q^n \in M^!_{k+\frac{1}{2}}$, только при $k \leq 0$ выражение снизу надо ещё умножить на p^{1-2k} для получения целых коэффициентов):

$$h \mid T(p) := \sum_{\substack{n \gg 0 \\ (-1)^k n \equiv 0,1 \pmod 4}} \left(a(p^2 n) + \left(\frac{(-1)^k n}{p} \right) p^{k-1} a(n) + p^{2k-1} a\left(\frac{n}{p^2} \right) \right) q^n$$

Аналоги форм f_d и g_D

Обозначим коэффициентов аналогичных форм:
$A_m(D,d) := [q^D](f_d \mid T(m))$, $B_m(D,d) := [q^d](g_D \mid T(m))$. Тогда формулу для следов и двойственность между f_d и g_D можно обобщить соответственно в формулы

$$t_m(d) = -B_m(1,d)\,, \quad A_m(D,d) = -B_m(D,d)\,.$$

Так как операторы Гекке порождены операторами $T(p)$, ограничимся на простые $m = p$. Так как $J_m = J \mid T(m)$, то $t_m(d) = \sum_{M,Q} \frac{J(M\alpha_Q)}{w_Q}$, последнее линейно выражается через $t_1(dp^2), t_1(d), t_1(d/p^2)$ с коэффициентами из определения $T(p)$ выше, и первое равенство следует из первой формулы для $t(d)$. Для второго смотрим на главную часть у $f_d \mid T(p)$, по ней заключаем, что $f_d \mid T(p) = pf_{d/p^2} + \left(\frac{-n}{p}\right) f_d + f_{dp^2}$ и завершаем доказательство применением формулы $[q^D]f_d = -[q^d]g_D$.

Формула для $\mathcal{H}_d(\tau)$

Также верно $j(\tau) - j(z) = q^{-1}\exp\left(-\sum_{m>1} J_m(z)\frac{q^m}{m}\right)$; это следует из того, что $\frac{1}{\tau}\frac{d}{d\tau}$ от обеих частей есть модулярные функции от z с одним полюсом в $z = \tau$ (простым, вычета 1) и нулем в $z = i\infty$. Перемножая взвешенно для $z = M\tau, M \in \Gamma\backslash\mathcal{M}_n$, получим

$$\mathcal{H}_d(\tau) = q^{-H(d)}\exp\left(-\sum_{m>1} t_m(z)\frac{q^m}{m}\right).$$

По формулам на предыдущем слайде и $A_m(1,d) = \sum_{n|m} nA_1(n^2,d)$ получим

$$\mathcal{H}_d(\tau) = q^{-H(d)}\exp\left(-\sum_{m>1, n|m}\frac{nA_1(n^2,d)}{m}\right) = q^{-H(d)}\prod_{n>1}(1-q^n)^{[q^{n^2}]f_d},$$

тем самым независимо доказав частный случай соответствия произведений и форм веса 1/2 выше.

Группы Фрике

Заменим Γ на другую группу рода 0. Например, группу Фрике $\Gamma_0(p)^*$ для $p = 2, 3, 5$ — подгруппу в $SL_2(\mathbb{R})$, порождённую $\Gamma_0(p)$ и матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1/\sqrt{p} \\ \sqrt{p} & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Для её есть единственная инвариантная функция $j_p^*(\tau)$ на $\mathbb{H}$ с разложением $q^{-1} + O(q)$, например:

$$j_2^* = \left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)}\right)^{24} + 24 + 2^{12}\left(\frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{24}, j_5^* = \left(\frac{\eta(\tau)}{\eta(5\tau)}\right)^{6} + 6 + 5^3\left(\frac{\eta(5\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{6}.$$

Для выбранных d, p и $\beta, \beta^2 \equiv -d \pmod{4p}$, обозначим множество форм $Q = [a, b, c]$ с $p \mid a$ и $b \equiv \beta \pmod{2p}$ за $\mathcal{Q}_{d,p,\beta}$. Отображение $\mathcal{Q}_{d,p,\beta}/\Gamma_0(N) \to \mathcal{Q}_d/\Gamma$ биективно (и даёт подъём точек α_Q), а действие дополнительной матрицы выше переставляет $\mathcal{Q}_{d,p,\pm\beta}$.

$$t^{(p)}(d) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{d,p}/\Gamma_0(p)^*} \frac{j_p^*(\alpha_Q)}{w_Q}.$$

Слабые формы Якоби

Слабая форма Якоби (из $\tilde{J}_{k,m}$, веса k и индекса m) — это голоморфная функция $\phi(\tau, z)$ на $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ для который выполняются следующие уравнения (при $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$)

$$\phi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k e^{\frac{2\pi i m c z}{c\tau + d}} \phi(\tau, z)\,,$$
$$\phi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e^{-2\pi i m(\lambda^2\tau + 2\lambda z)} \phi(\tau, z)\,,$$

и разложение Фурье которой имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r \in \mathbb{Z}} c(n, r) e^{2\pi i(n\tau + rz)}$. Для таких форм $c(n, r)$ зависит только от $(4mn - r^2)$ и $r \pmod{2m}$.
По соответствию между формами веса 3/2 и формами Якоби веса 2 и 1 форме $g(\tau)$ соответствует $\phi(\tau, z) = (\zeta - 2 + \zeta^{-1}) + O(q)$ (с $c(n, r)$ зависящим только от $4n - r^2$). Для веса 2 и индекса p также есть единственная почти голоморфная форма Якоби $\phi^{(p)}$ с разложением $(\zeta + \zeta^{-1}) + O(q)$ и $c(n, r) = c(4np - r^2)$ зависящим только от $4np - r^2$. Тогда верна аналогичная первой формула следа

$$t^{(p)}(d) = -c_{\phi^{(p)}}(d)\,.$$