Решетка Лича

унимодулярность, особенности, тета-функция

Иван Пуцев

Международная лаборатория зеркальной симметрии и автоморфных форм

2024

План

- Целочисленные решетки; унимодулярность
- Решетка E_8
- Модулярные формы
- Тета-функции решеток
- Построение решетки Лича Λ_{24}
- Тета-функция и уникальность решетки Лича
- Унимодулярные решетки в размерности 24
- Плотнейшие упаковки шаров и контактное число
- Экстремальные решетки

Решетки

Определение

Целочисленная решетка L ранга n – это свободная абелева группа ранга n с симметричной невырожденной билинейной формой $(\cdot\,,\cdot) : L \times L \longrightarrow \mathbb{Z}$.

- Решетка L называется *положительно определенной* $(L > 0)$, если $\forall v \in L, v \neq 0 : \ (v, v) > 0$.
- Решетка L называется *четной*, если $\forall v \in L : \ (v, v) \in 2\mathbb{Z}$. В противном случае она называется *нечетной*.

Любая такая решетка может быть вложена в $\mathbb{R}^n$: $L \longrightarrow L \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$. Изоморфизм решеток – это изоморфизм абелевых групп, сохраняющий билинейную форму. Эта форма на решетке индуцирует скалярное произведение. Если $L > 0$, то пространство является евклидовым.

Решетки

Определение

Определитель решетки L ($\det L$) – определитель матрицы Грама в некотором базисе решетки.

Если $L > 0$, то $\det L > 0$.

Определение

Кообъем решетки (положительной) L: $\Delta(L) = \sqrt{\det L}$.

Пусть $M \subset L$ – две решетки одного ранга, тогда:

Определение

Индекс подрешетки M в решетке L: $[L : M] = |L/M|$.

Решетки

Определение

Двойственная решетка (рациональной) решетки L – это $L^* = \{u \,|\, \forall v \in L \; (u, v) \in \mathbb{Z}\}$.

Если решетка целочисленная, то $L \subset L^*$. Фактор L^*/L называется *дискриминантной группой*.

Теорема 1

Пусть $M \subset L$ – две решетки одного ранга, A – матрица перехода между базисами решеток. Тогда:
1) $[L : M] = |\det A|$; 2) $[L^* : L] = \det L$;
3) $[L : M]^2 = \det M / \det L$

Док-во: рассмотреть цепочку $M \subset L \subset L^* \subset M^*$.

Унимодулярность

Определение

Целочисленная решетка L называется *унимодулярной*, если $\det L = \pm 1$.

Следствие из теоремы 1. $\det L^* = (\det L)^{-1}$, а значит целочисленная решетка унимодулярна тогда и только тогда, когда $L = L^*$.

Теорема 2

Размерность четной положительной унимодулярной решетки L делится на 8.

Четная унимодулярная решетка E_8

Первый пример такой решетки – E_8. Эта решетка решает знаменитые задачи о плотнейшей упаковке шаров и о контактном числе в размерности 8.

Пусть $D_n = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \sum x_i \in 2\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^n$. У нее есть очевидный базис: $e_1 - e_n, \ldots, e_{n-1} - e_n, 2e_n$. Согласно теореме 1, $[\mathbb{Z}^n : D_n] = 2$. Теперь рассмотрим $n = 8$ и расширим решетку D_8 вектором $e = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$: $E_8 = \langle D_8, e \rangle$. Так как $2e \in D_8$, $E_8 / D_8 = \{\overline{0}, \overline{e}\}$, т.е. $[E_8 : D_8] = 2$.

Следствие. $\det E_8 = [E_8 : D_8]^{-2} \det D_8 = \frac{1}{4}[\mathbb{Z}^n : D_n]^2 \det Z^n = 1$. E_8 унимодулярна.

Целочисленность, четность проверяются несложно, положительность очевидна.

Замечание. Абсолютно аналогично строится серия целых унимодулярных решеток $\Gamma_n > 0$, $n = 4k$, которые являются четными тогда и только тогда, когда k четно.

Модулярные формы

Пусть $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ – верхняя полуплоскость, на которой действует группа $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm id\}$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad M\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Определение

Модулярной формой веса $2k$ называется голоморфная на $\mathbb{H}$ функция f, которая удовлетворяет двум условиям:
1) *Модулярность*: $\forall M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{2k} f(\tau)$$

2) f голоморфна на бесконечности.

Если на бесконечности форма обращается в ноль, она называется *параболической*.

Примеры модулярных форм

Определение

Ряд Эйзенштейна веса $2k$ – это модулярная форма веса $2k$:

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}}$$

$G_{2k}(\infty) = 2\zeta(2k)$, поэтому мы будем использовать нормированные ряды Эйзенштейна: $E_{2k} = G_{2k}(\infty)/2\zeta(2k)$. Модулярные формы раскладываются в ряд Фурье. В частности,

$$E_{2k}(\tau) = 1 + (-1)^k \frac{4k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n,$$

где $q = e^{2\pi i \tau}$, B_k – k-е число Бернулли, а $\sigma_s(n)$ – сумма s-х степеней делителей числа n: $\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s$.

Тета-функции решеток

Пусть L – четная положительно определенная решетка ранга n, $q = e^{2\pi i\tau}$.

Определение

Тета-функция решетки L определяется так:

$$\theta_L(\tau) = \sum_{v\in L} e^{\pi i\tau(v,v)} = \sum_{v\in L} q^{(v,v)/2} = \sum_{k\geq 0} r_L(k) q^k,$$

где $r_L(k)$ обозначает количество векторов с решетки нормы $2k$.

Теорема 3

Если L – четная положительная **унимодулярная** решетка, то ее тета-функция является модулярной формой веса $n/2$.

Замечание. Тета-функции неизоморфных решеток могут совпадать, например Γ_{16} (не порождена корнями) и $E_8 \oplus E_8$ неизоморфны, а тета-функции у них обеих – E_8.

Построение решетки Лича

Рассмотрим $\mathbb{R}^{n,1}$ – вещественное $(n+1)$-мерное пространство со скалярным произведением
$x \cdot y = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n$.
В этом пространстве при любом n определена **нечетная** унимодулярная решетка $\mathrm{I}_{n,1}$ – все точки с целыми координатами. Если $n \equiv 1 \mod 8$, то есть и **четная** унимодулярная решетка:
$\mathrm{II}_{n,1} = \{x \in \mathbb{Z}^{n+1}$ или $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^{n+1} \mid x_0 + \ldots + x_{n-1} - x_n \in 2\mathbb{Z}\}$ – конструкция, аналогичная Γ_n.

Теорема 4

Любая нечетная унимодулярная решетка в $\mathbb{R}^{n,1}$ изоморфна $\mathrm{I}_{n,1}$. Любая четная унимодулярная решетка изоморфна $\mathrm{II}_{n,1}$, где $n \equiv 1 \mod 8$.

Построение решетки Лича, способ 1

Рассмотрим $\mathrm{I}_{n,1}$ и вектор $t \in \mathrm{I}_{n,1}$: $t \cdot t = -1$. Тогда $\Lambda = \mathrm{I}_{n,1} \cap t^{\perp}$ – целая положительная **унимодулярная** решетка.
(Это доказывается в 2 этапа: сначала нужно дополнить t до базиса решетки, что можно сделать, так как t – примитивный вектор, потом ортогонализовать базис относительно t.)

Определение

Решетка $\Lambda_{24} = \mathrm{II}_{24,1} \cap t^{\perp}$, где $t = (3, 5, 7, \ldots, 45, 47, 51 \,|\, 145)$ – **четная** положительная унимодулярная решетка ранга 24. Она называется *решеткой Лича*.

Замечание. Если взять $n = 8$, $t = (1, 1, \ldots, 1 \,|\, 3)$, то $\mathrm{I}_{8,1} \cap t^{\perp} \simeq E_8$.

Построение решетки Лича, способ 2

Рассмотрим $II_{n,1}$ и примитивный *изотропный* вектор $w \in II_{n,1}$: $w \cdot w = 0$. Тогда $w \in w^{\perp}$ и $\Lambda = (II_{n,1} \cap w^{\perp})/\langle w \rangle$ – четная положительная **унимодулярная** решетка ранга $n-1$.

Доказательство: 1) Так как любой примитивный вектор можно дополнить до базиса решетки, дополним w: пусть w, $a_1, \dots, a_n$ – базис $II_{n,1}$. Пусть $G = (g_{ij})$ – матрица Грама этого базиса. Так как $\det G = \det II_{n,1} = -1$, а $g_{00} = 0$, имеем по теореме о линейном представлении НОДа $\sum_{j=1}^{n} m_j g_{0j} = 1$ для некоторого набора целых m_j (очевидно, этот набор так же примитивен). Но тогда вектор $e = \sum_{j=1}^{n} m_j a_j$ примитивен и обладает тем свойством, что $e \cdot w = 1$. Дополним его до базиса решетки: пусть e, $e'_1, \dots, e'_n$ – новый базис. Заменяя e'_j на $e_j = e_j - (e'_j \cdot w)e$, получим новый базис $II_{n,1}$, где $e_1, \dots, e_n$ – базис $II_{n,1} \cap w^{\perp}$.

Построение решетки Лича, способ 2

2) Итак, мы получаем, что $II_{n,1} = \langle II_{n,1} \cap w^{\perp}, e \rangle >$. Теперь дополним w до базиса в $II_{n,1} \cap w^{\perp}$. Получим базис исходной решетки e, w, $f_2, \ldots, f_n$, в котором матрица Грама принимает удобный вид. Пусть G' эта матрица Грама, а F – матрица Грама подрешетки, образованной векторами $f_2, \ldots, f_n$. Тогда $\det G' = -1 = (-1) \det F$, А значит Λ – **унимодулярная** решетка с определителем 1.
3) Корректность скалярного произведения для факторпространства: если $u, v \perp w$, то $(u + \lambda w) \cdot (v + \mu w) = u \cdot v$.
4) Положительность следует из того, что в $II_{n,1} \cap w^{\perp}$ нет больше изотропных векторов, кроме w.
5) Четность наследуется из решетки $II_{n,1}$.
Теперь можно сформулировать второе определение решетки Лича:

Построение решетки Лича, способ 2

Определение

Возьмем $w = (0, 1, 2, \dots, 24 \,|\, 70)$ – изотропный вектор решетки $\mathrm{II}_{25,1}$. Тогда $\Lambda_{24} = (\mathrm{II}_{n,1} \cap w^{\perp})/\langle w \rangle$ – четная положительная унимодулярная решетка ранга 24. Она называется *решеткой Лича*.

Замечание. Уравнение $0^2 + 1^2 + \ldots + m^2 = n^2$ имеет только два натуральных решения: (1, 1) и (24, 70).

Тета-функция решетки Лича

Обозначим за M_{2k} (S_{2k}) – пространство модулярных (параболических) форм веса $2k$. Тета-функция решетки Лича $\theta_{\Lambda_{24}} = \theta \in M_{12}$. Но тогда $\theta - E_{12} \in S_{12}$, а $S_{12} = \mathbb{C} \cdot \Delta$, где $\Delta = (E_4^3 - E_6^2)/1728 = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$. Поэтому $\theta = E_{12} + c \cdot \Delta$. Найти c позволяет особенность решетки Лича – у нее нет *корней* (векторов нормы 2), а поэтому коэффициент $r_{\Lambda_{24}}(1) = 0$.

$$\text{Следовательно, } c = -\frac{65520}{691}.$$

Записав через образующие алгебры модулярных форм, получим:

$$\theta_{\Lambda_{24}} = \frac{63}{108}E_4^3 + \frac{45}{108}E_6^2$$

Уникальность решетки Лича

Теорема 5

Существует единственная четная положительная унимодулярная решетка ранга $n < 32$, не содержащая корней – решетка Лича.

Набросок доказательства (Conway): 1) Пусть Λ – такая решетка и пусть $n = 4k$. Тогда $\theta_\Lambda = E_{2k} + f$, где $f \in S_{2k}$. Так как $2k < 16$ и кратно четырем, а $S_4 = S_8 = 0$, получаем $2k = 12$, $n = 24$, $\theta_\Lambda = (63E_4^3 + 45E_6^2)/108 = \sum N_{2s} q^s$; $N_0 = 1$, $N_2 = 0$, $N_4 = 196560$, $N_6 = 16773120$, $N_8 = 398034000$.
2) Будем называть вектора v и u *эквивалентными*, если $v - u \in 2\Lambda$. $|\Lambda / 2\Lambda| = 2^{24}$. Вектор x называем *коротким* (*short*), если $|x| \geq \sqrt{8}$. Они идут парами: x, $-x$.

Уникальность решетки Лича

Лемма

В каждом классе эквивалентности есть короткий вектор. Классы, в которых больше 1 пары коротких векторов – в точности те, которые содержат векторы длины $\sqrt{8}$, и такие классы содержат ровно 24 попарно ортогональные пары таких векторов.

Одним таким набором попарно ортогональных коротких векторов порождается решетка $\Lambda_0 \subset \Lambda$. В этих координатах удобный вид принимает решетка Λ и доказывается, что редукция ее координат по модулю 4 образует систему Штейнера $S(5, 8, 24)$, а она уникальна с точностью до перестановки элементов (Witt).

Следствие.

$|\mathrm{Aut}(\Lambda_{24})| = (N_8/48) \cdot 2^{12} \cdot |M_{24}| = 2^{22}3^9 5^4 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$, где M_{24} – группа Матьё.

Плотнейшие упаковки шаров

Какой максимальной плотности упаковки единичных шаров в $\mathbb{R}^n$ можно добиться? Пусть ответ – $\nu(n)$. Очевидно, $\nu(1) = 1$. В 1940 году было доказано, что гексагональная упаковка при $n = 2$ самая плотная и дает $\nu(2) = \pi/2\sqrt{3}$.Гипотеза Кеплера (1611): регулярная упаковка (как ядра) при $n = 3$ самая плотная и дает $\nu(3) = \pi/3\sqrt{2}$. Доказана в 1998 (Hales), компьютерная проверка завершена в 2014. Мария Вязовская (2016) – плотнейшую упаковку при $n = 8$ дает E_8: $\nu(8) = \pi^4/(2^{\cdot}44!) = 0.25367\ldots$. Вязовская, Cohn, Kumar, и Miller (2017) – решетка Лича дает максимальную плотность $\nu(24) = \pi^12/12! = 0,00193\ldots$ в размерности 24.

Контактное число (kissing number problem)

Сколько единичных шаров в $\mathbb{R}^n$ могут касаться данного единичного шара, не пересекаясь? Пусть ответ – $\mu(n)$. Очевидно, $\mu(1) = 2$. Гексагональная упаковка при $n = 2$ дает $\mu(2) = 6$. Гипотеза Ньютона: $\mu(3) = 12$. Доказана окончательно в 1953 (красивое доказательство дал позже Лич). В размерности 4 контактное число $\mu(4)$ – это 24. Это доказал Олег Мусин (2003). Ответ при $n = 8$ дает E_8: $\mu(8) = 240$. Контактное число в размерности 24 дает решетка Лича: $\mu(24) = 196560$.

Четные положительные решетки ранга 24

Четные положительные унимодулярные решетки ранга 24 были классифицированы Нимейером (1968). Их 24: 23 с минимальной нормой 2 и решетка Лича с минимальной нормой 4.

Замечание. В размерности 32 существует более 80 миллионов четных положительных унимодулярных решеток.

Есть альтернативное доказательство уникальности решетки Лича, использующую классификацию решеток с непустыми корневыми системами (см. Conway, Sloan, "Sphere packings, latticies and groups chap. 18, 440).

Экстремальные решетки

Минимальная норма μ вектора нечетной унимодулярной решетки Λ не больше, чем $\left[\frac{n}{8}\right] + 1$. Если равенство достигается, решетка называется *экстремальной*.
Минимальная норма μ вектора четной унимодулярной решетки Λ не больше, чем $2\left[\frac{n}{24}\right] + 2$.

Теорема 7

Экстремальные положительные унимодулярные решетки существуют только в размерностях 1–8, 12, 14, 15, 23 или 24. В каждой размерности такая решетка единственная.

Экстремальные решетки

Если расширить определение экстремальности для четных унимодулярных решеток, а именно называть ее экстремальной, если $\mu = 2\left[\frac{n}{24}\right] + 2$ (соответствующая модулярная форма экстремальная), то ответ изменится:

n	μ	number of extremal latticies
8	2	1
16	2	2
24	4	1
32	4	$\geq 10^7$
40	4	$\geq 10^{51}$
48	6	≥ 3
72	8	≥ 1
80	8	≥ 4
≥ 163264	—	0

Экстремальные модулярные формы (дополнительно)

Определение

Пространство M_{4k} содержит единственную модулярную форму, у которой свободный член равен 1, а следующие $m_k = \left[\frac{n}{24}\right]$ коэффициентов равны 0. Такая форма называется *экстремальной*.

Теорема (Зигель)

Пусть $f \in M_{4k}$ экстремальна. Тогда коэффициент при q^{m_k+1} больше нуля, а при q^{m_k+2} меньше нуля для $k \geq 20408$.

Литература

- J.H. Conway, N.J.A. Sloane / "Sphere Packings, Lattices and Groups Springer / third edition
- Ж.-П. Серр / "Курс арифметики"/ из-во Мир, Москва, 1972
- E. Witt / Theorie der quadratischen Formen / JRAM, 1937
- O. R. Musin, The problem of the twenty-five spheres / Russian Mathematical Surveys, 2003 / Volume 58, Issue 4, 794–795
- Gabriele Nebe, "Extremal lattices"/ Oberwolfach, August 2012, https://www.math.rwth-aachen.de/ Gabriele.Nebe/talks/OW12.pdf