Модулярные дифференциальные уравнения для форм Якоби малого индекса

Дмитрий Адлер

(ММИ им. Л. Эйлера)

Семинар "Автоморфные формы и их приложения"

22 октября 2024, Москва

Данный доклад основан на совместных работах

Dmitrii Adler, Valery Gritsenko, *Elliptic genus and modular differential equations*, Journal of Geometry and Physics, Volume **181**, 2022

D. Adler, V. Gritsenko, *Modular differential equations of the elliptic genus of Calabi–Yau fourfolds*, Journal of Geometry and Physics, **194**, 2023.

1 Модулярный дифференциальный оператор

Пусть $D = q\frac{d}{dq} = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}$. Тогда для модулярной формы $f = \sum a(n)q^n$ веса k:

$$D(f) = \sum na(n)q^n.$$

Вообще говоря, $D(f)$ не является модулярной формой, но ей является:

$$\mathbb{D}_k(f) = 12D(f) - kE_2 \cdot f \in M_{k+2}.$$

Как можно проверить, для η-функции Дедекинда

$$\frac{D(\eta)}{\eta} = \frac{1}{24}E_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{D}_{\frac{k}{2}}(\eta^k) = 0.$$

Имеют место также известные уравнения Рамануджана:

$$\mathbb{D}_2(E_2) = -E_2^2 - E_4, \quad \mathbb{D}_4(E_4) = -4E_6, \quad \mathbb{D}_6(E_6) = -6E_4^2.$$

То есть кольцо $\mathbb{C}[E_2, E_4, E_6]$ инвариантно относительно D.

2 Формы Якоби

Определение. Пусть $\tau \in \mathcal{H}$ и $z \in \mathbb{C}$. Тогда *слабая форма Якоби веса k и индекса m* – это голоморфная функция $\varphi : \mathcal{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{2\pi i m \frac{cz^2}{c\tau+d}} \varphi(\tau, z)$ для $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$;

2) $\varphi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e^{-4\pi i m \lambda z - 2\pi i m \lambda^2 \tau} \varphi(\tau, z)$ для $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$;

3) функция $\varphi(\tau, z)$ имеет разложение в ряд Фурье:

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{n \geqslant 0} a(n, l) q^n \zeta^l = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{n \geqslant 0} a(n, l) e^{2\pi i n \tau} e^{2\pi i l z},$$

множество таких форм обозначается

$$J^w_{*,*} = \bigoplus_{k,m} J^w_{k,m}.$$

3 Структура биградуированного кольца $J^w_{*,*}$

Как было показано в M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms.* Progress in Mathematics **55**. Birkhäuser, Boston, Mass., 1985, биградуированное кольцо слабых форм Якоби имеет структуру свободной алгебры

$$J^w_{2*,*} = \oplus_{k,m} J^w_{k,m} = \mathbb{M}_*[\varphi_{-2,1}, \varphi_{0,1}]$$

$$\varphi_{-2,1}(\tau, z) = \frac{\vartheta(\tau, z)^2}{\eta^6(\tau)} = (\zeta - 2 + \zeta^{-1}) + q \cdot (\dots) \in J^w_{-2,1}$$

$$\varphi_{0,1}(\tau, z) = -\frac{3}{\pi^2}\wp(\tau, z)\varphi_{-2,1}(\tau, z) = (\zeta + 10 + \zeta^{-1}) + q \cdot (\dots) \in J^w_{0,1},$$

где $\vartheta(\tau, z)$ – классическая нечётная тета-функция Якоби, а $\wp(\tau, z)$ – $\wp$-функция Вейерштрасса.

Отметим, что $2\varphi_{0,1}$ есть эллиптический род $K3$ поверхности, а также является производящей функцией кратностей положительных корней одной из основных лоренцевых алгебр Каца-Муди, построенных в V. Gritsenko, V. Nikulin, *Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras*. Part II, Int. J. Math. 9 (1998) 201–275.

4 Модулярный дифференциальный оператор H_k

Аналогом оператора D в случае форм Якоби является **оператор теплопроводности**

$$H = \frac{3}{m}\frac{1}{(2\pi i)^2}\left(8\pi i m\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = 12q\frac{d}{dq} - \frac{3}{m}\left(\zeta\frac{d}{d\zeta}\right)^2.$$

На форму $\varphi_{k,m} = \sum a(n,l)q^n\zeta^l$ веса k и индекса m он действует

$$H(a(n,l)q^n\zeta^l) = \frac{3}{m}(4nm - l^2)a(n,l)q^n\zeta^l.$$

Как и в случае модулярных форм, $H(\varphi_{k,m})$ не является вообще говоря формой Якоби, но ей является её корректировка при помощи E_2:

$$H_k(\varphi_{k,m}) = H(\varphi_{k,m}) - \frac{(2k-1)}{2}E_2\cdot\varphi_{k,m}.$$

Данный оператор увеличивает вес формы на 2 и не меняет индекс.

5 Эллиптический род

Пусть M – (почти) комплексное компактное многообразие (комплексной) размерности d и T_M – его касательное расслоение. Пусть $\tau \in \mathcal{H}$, $q = e^{2\pi i\tau}$ и $z \in \mathbb{C}$, $\zeta = e^{2\pi iz}$. Определим формальный ряд

$$\mathbb{E}_{q,\zeta} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \bigwedge\nolimits_{-\zeta^{-1}q^n} T_M^* \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \bigwedge\nolimits_{-\zeta q^n} T_M \otimes \bigotimes_{n=0}^{\infty} S_{q^n} T_M^* \otimes \bigotimes_{n=0}^{\infty} S_{q^n} T_M,$$

где

$$\bigwedge\nolimits_x E = \sum_{k\geqslant 0} (\wedge^k E) x^k, \quad S_x E = \sum_{k\geqslant 0} (S^k E) x^k.$$

и $\wedge^k$ – k-я внешняя степень, S^k – k-я симметрическая степень.

Пусть

- td – это класс Тодда,
- $\mathrm{ch}(\mathbb{E}_{q,\zeta})$ – характер Черна, применённый к каждому коэффициенту формального ряда,
- $\int_M$ – вычисление дифференциальной формы старшей степени на фундаментальном цикле многообразия.

Тогда эллиптический род многообразия M – функция от $\tau \in \mathcal{H}$ и $z \in \mathbb{C}$:

$$\chi(M;\tau,z) = \zeta^{\frac{d}{2}} \int_M \mathrm{ch}(\mathbb{E}_{q,\zeta})\mathrm{td}(T_M) = \sum_{n\geq 0,\, l\in\mathbb{Z}} a(n,l)\, q^n \zeta^l,$$

причём q^0-член эллиптического рода M равен χ_y-роду Хирцебруха с точностью до некоторой нормализации:

$$\chi(M;\tau,z) = \sum_{p=0}^{d} (-1)^p \chi_p(M_d) \zeta^{d/2-p} + q(\dots)$$

где $\chi_p(M) = \sum_{q=0}^{d} (-1)^q h^{p,q}(M)$.

6 Эллиптический род и формы Якоби

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если M – компактное комплексное многообразие размерности d с $c_1(M) = 0$ (над $\mathbb{R}$), то его эллиптический род $\chi(M;\tau,z)$ является слабой формой Якоби веса 0 и индекса $\frac{d}{2}$ с целыми коэффициентами Фурье.

Подробнее см. :

T. Kawai, Y. Yamada, S. K. Yang, *Elliptic Genera and $N = 2$ Superconformal Field Theory.* Nucl. Phys. **B414** (1994), 191–212.

V. Gritsenko, *Elliptic genus of Calabi–Yau manifolds and Jacobi and Siegel modular forms.* St. Petersburg Math. J. **11** (1999), 781–804.

B. Totaro, *Chern numbers for singular varieties and elliptic homology*, Ann. Math. (2) 151 (2000) 757–791.

7 Эллиптический род многообразий Калаби–Яу размерности 2, 3 и 5

В случае индексов $m = 1, \frac{3}{2}$ и $\frac{5}{2}$ пространства $J^w_{0,m}$ одномерны. Тогда эллиптический род многообразий Калаби–Яу размерностей 2, 3 и 5 зависит только от их эйлеровой характеристики (значении q^0-члена при $z = 0$).

Многообразие Калаби–Яу размерности 2 – это $K3$-поверхность с

$$e(K3) = 24.$$

Тогда

$$\chi(K3;\tau,z) = 2\varphi_{0,1}(\tau,z) = 2\zeta + 20 + 2\zeta^{-1} + q(\dots).$$

Для многообразий Калаби–Яу размерности 3 и 5:

$$\chi(CY_3;\tau,z) = \frac{e(CY_3)}{2}\,\varphi_{0,\frac{3}{2}} = \frac{e(CY_3)}{2}\left(\zeta^{-\frac{1}{2}} + \zeta^{\frac{1}{2}} + q(\dots)\right),$$

$$\chi(CY_5;\tau,z) = \frac{e(CY_5)}{24}\,\varphi_{0,\frac{3}{2}}\cdot\varphi_{0,1} = \frac{e(CY_5)}{24}\left(\zeta^{\pm\frac{3}{2}} + 11\zeta^{\pm\frac{1}{2}} + q(\dots)\right)$$

8 Дифференциальные уравнения

Теорема.

Для эллиптических родов многообразий Калаби–Яу размерности 2, 3 и 5 имеют место следующие дифференциальные уравнения:

$$H_4H_2H_0(\varphi_{0,1}) - \frac{101}{4}E_4H_0(\varphi_{0,1}) + 10E_6\varphi_{0,1} = 0,$$

$$H_0(\varphi_{0,\frac{3}{2}}) = 0,$$

$$H_4H_2H_0(\varphi_{0,\frac{5}{2}}) - \frac{611}{25}E_4H_0(\varphi_{0,\frac{5}{2}}) + \frac{88}{25}E_6\varphi_{0,\frac{5}{2}} = 0.$$

Таким образом, эллиптический род трехмерных многообразий Калаби–Яу удовлетворяет простейшему уравнению порядка 1 относительно оператора теплопроводности. Эллиптический род $K3$ поверхности и любого многообразия Калаби–Яу размерности 5 удовлетворяют модулярному дифференциальному уравнению порядка 3.

9 Ядро модулярного дифференциального оператора

Тождество Лейбница. Прямое вычисление показывает, что для $f_{k_1} \in M_{k_1}$, $\varphi_{k_2,m} \in J_{k_2,m}$:

$$H_{k_1+k_2}(f_{k_1}\varphi_{k_2,m}) =$$

$$= 12D(f\varphi) + \frac{3}{2\pi^2 m}\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}, \frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}\right)(f\varphi) + \left(\frac{1}{2} - k_1 - k_2\right)E_2 f\varphi =$$

$$= f_{k_1} H_{k_2}(\varphi_{k_2,m}) + \mathbb{D}_{k_1}(f_{k_1})\varphi_{k_2,m}.$$

Замечание. Для двух форм Якоби даже одного и того же ненулевого индекса тождество Лейбница не выполнено.

Теорема. Для произвольной решётки L форма Якоби $\varphi_{k,m}$ принадлежит ядру модулярного дифференциального оператора тогда и только тогда, когда для некоторого n форма $\eta^{n-2k}\varphi_{k,m}$ является голоморфной формой сингулярного веса.

В случае решётки A_1 голоморфными формами сингулярного веса являются

$$\vartheta(\tau,z)\in J_{\frac12,\frac12}(v_\eta^3\cdot v_H) \quad \text{и} \quad \vartheta_{\frac32}(\tau,z)=\eta(\tau)\frac{\vartheta(\tau,2z)}{\vartheta(\tau,z)}\in J_{\frac12,\frac32}(v_\eta\cdot v_H).$$

Определим

$$\varphi_{-1,\frac12}(\tau,z)=\frac{\vartheta(\tau,z)}{\eta^3(\tau)},\quad \varphi_{0,\frac32}(\tau,z)=\frac{\vartheta(2\tau,z)}{\vartheta(\tau,z)}.$$

Теорема. Пусть $\varphi\in J_{k,m}^w$ – слабая форма Якоби целого веса и целого или полуцелого индекса. Тогда φ лежит в ядре дифференциального оператора, если

$$\varphi_{k,m}=\begin{cases}\varphi_{0,\frac32}(\tau,az)\cdot\Delta(\tau)^n,\\ \varphi_{-1,\frac12}(\tau,az)\cdot\Delta(\tau)^n,\end{cases}$$

где $a\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}_{\geqslant0}$.

10 Примеры

Рассмотрим

$$\varphi_{0,6}(\tau, z) = \varphi_{0,\frac{3}{2}}(\tau, 2z) = \frac{\vartheta(4\tau, z)}{\vartheta(2\tau, z)} = (\zeta + \zeta^{-1}) + q(\ldots) \in J^{w}_{0,6}.$$

Эта форма Якоби веса 0 и минимально возможного целого индекса, принадлежащая ядру H_0.

Автоматически

$$\varphi_{12,6}(\tau, z) = \Delta\varphi_{0,6}(\tau, z) \in KerH_{12}.$$

Другим примером является

$$\varphi_{11,2}(\tau, z) = \eta^{21}(\tau)\vartheta(\tau, 2z) \in KerH_{11}.$$

11 Уравнения типа Канеко–Загье

Дифференциальное уравнение Канеко–Загье

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6} E_2(\tau) f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12} E_2'(\tau) f(\tau) = 0$$

возникло в работе

M. Kaneko, D. Zagier, *Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials.* AMS/IP Stud. Adv. Math. **7** (1998), 97–126.

в контексте подъёмов суперсингулярных j-инвариантов. В терминах оператора $\mathbb{D}_k$ оно может быть записано как

$$\mathbb{D}_{k+2}\mathbb{D}_k(f) - k(k+2)E_4 \cdot f = 0.$$

Как можно заметить, $E_4(\tau)$ удовлетворяет данному уравнению. Это уравнение и его обобщения имеют приложения в теории чисел и теории вертексных алгебр.

12 Аналог уравнения Канеко–Загье для форм Якоби

Если мы заменим оператор $\mathbb{D}_k$ на H_k, а ряд Эйзенштейна E_4 на $E_{4,1}$, то мы можем получить уравнение на $E_{4,1}$. А именно,

$$H_6 H_4(E_{4,1}(\tau, z)) - \frac{77}{4} E_4(\tau) E_{4,1}(\tau, z) = 0.$$

Определение. МДУ вида $H_{k+2}(H_k(\varphi_{k,m})) = \lambda E_4 \varphi_{k,m}$ называются *уравнениями типа Канеко–Загье.*

Заметим, что

$$H_{k+2} H_k = H^2 - (2k+1) E_2 H + 3(4k^2 - 1) E_2' + \frac{(2k-1)(2k+3)}{4} E_4.$$

Если мы положим $\lambda = \frac{(2k-1)(2k+3)}{4} + \mu$, то уравнение типа Канеко–Загье может быть записано как

$$[H^2 - (2k+1) E_2 H + 3(4k^2 - 1) E_2' - \mu E_4](\varphi_{k,m}) = 0.$$

Уравнение с $\mu = 0$ мы называем *каноническим уравнением типа Канеко–Загье.*

Условие на то, чтобы форма была решением уравнения Канеко–Загье, даёт достаточно жёсткие условия на коэффициенты.

Предложение. Пусть $\varphi_{k,m} \in J^w_{k,m}$ – решение уравнения Канеко-Загье $H_{k+2}H_k\varphi_{k,m} = \lambda E_4\varphi_{k,m}$. Тогда выполнено следующее.

1. Если $a(0, l_1)$, $a(0, l_2)$ – два ненулевых коэффициента Фурье с $l_1^2 \neq l_2^2$, то $2k + 1 = -\frac{3}{m}(l_1^2 + l_2^2)$.

2. Форма $\varphi_{k,m}$ не содержит трёх ненулевых коэффициента $a(0, l_i)$ с попарно различными l_i^2.

3. Если $\varphi_{k,m}$ содержит в точности два ненулевых коэффициента $a(0, l_1)$ и $a(0, l_2)$ $(l_1^2 \neq l_2^2)$, то k отрицателен и

$$q^0[\varphi_{k,m}] = \begin{cases} c(\zeta^{l_1} - \zeta^{l_2} - \zeta^{-l_2} + \zeta^{-l_1}) & \text{для чётного } k, \\ a(\zeta^{l_1} - \zeta^{-l_1}) + b(\zeta^{l_2} - \zeta^{-l_2}) & \text{для нечётного } k. \end{cases}$$

4. Вес $k \geq -2$, если k чётно, и $k \geq -3$, если k нечётно.

Данное предложение помогает доказать следующий результат.

Теорема. Уравнение типа Канеко-Загье

$$H_2H_0(\varphi_{0,m}) = \lambda E_4\varphi_{0,m}, \lambda \in \mathbb{C}$$

имеет только "тривиальные"решения. А именно, только

$$\varphi_{0,m}(\tau, z) = c\varphi_{0,\frac{3}{2}}(\tau, az), \quad a \in \mathbb{N}.$$

В этом случае $H_0(\varphi_{0,m}) = 0$ и $\lambda = 0$.

Следствие. Пусть M – многообразие Калаби–Яу размерности $2n$ и $h^{p,0}(M) = 0$ для каждого $0 < p < 2n$. Тогда эллиптический род данного многообразия не удовлетворяет МДУ порядка 1 или 2.

13 Примеры уравнений типа Канеко–Загье

Наш подход позволяет находить уравнения типа Канеко–Загье.

$$H_3 H_1(\vartheta^2(\tau,z)) - \frac{5}{4}E_4(\tau)\vartheta^2(\tau,z) = 0,$$

$$H_3 H_1(\vartheta(\tau,z)\vartheta(\tau,2z)) - \frac{11}{25}E_4(\tau)(\vartheta(\tau,z)\vartheta(\tau,2z)) = 0,$$

$$H_{\frac{5}{2}} H_{\frac{3}{2}}(\vartheta^3(\tau,z)) - 3E_4(\tau)\vartheta^3(\tau,z) = 0,$$

$$H_{\frac{7}{2}} H_{\frac{3}{2}}(\vartheta(\tau,2z)\vartheta^2(\tau,z)) - \frac{5}{4}E_4(\tau)(\vartheta(\tau,2z)\vartheta^2(\tau,z)) = 0.$$

Полученные уравнения могут быть переписаны в терминах параболических форм Якоби.

$$\varphi_{10,1}(\tau,z)=\eta^{18}(\tau)\vartheta^2(\tau,z),\quad \varphi_{9,3}(\tau,z)=\eta^{15}(\tau)\vartheta^2(\tau,z)\vartheta(\tau,2z)\quad (\lambda=\frac{5}{4}),$$

$$\varphi_{9,6}(\tau,z)=\eta^{15}(\tau)\vartheta^3(\tau,2z)\quad (\lambda=3),$$

$$\varphi_{10,10}(\tau,z)=\eta^{18}(\tau)\vartheta(\tau,2z)\vartheta(\tau,4z)\quad (\lambda=\frac{11}{25}).$$

Отметим, что первое и третье уравнения будут каноническими уравнениями типа Канеко–Загье. Чтобы второе уравнение было каноническим, нужно заменить $\vartheta^2(\tau,z)\vartheta(\tau,2z)$ на $\frac{\vartheta^2(\tau,z)\vartheta(\tau,2z)}{\eta(\tau)}$. Последнее же уравнение не корректируется должным образом.

14 Рекуррентные соотношения

МДУ порядка 1. Рассмотрим форму

$$\varphi_{0,\frac{3}{2}}(\tau,z)=\frac{\vartheta(2\tau,z)}{\vartheta(\tau,z)}=\sum_{n\in\mathbb{N},l\in 2\mathbb{Z}+1} a(n,l)q^n\zeta^{\frac{l}{2}}.$$

Условие $H_0(\varphi_{0,\frac{3}{2}})$ даёт

$$\left(12n-\frac{l^2-1}{2}\right)a(n,l)=\sum_{s=1}^{n}12\sigma_1(s)a(n-s,l).$$

Используя тот факт, что

$$\eta(\tau)\frac{\vartheta(2\tau,z)}{\vartheta(\tau,z)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{12}{n}\right)q^{\frac{n^2}{24}}\zeta^{\frac{n}{2}} \quad \text{и} \quad \prod_{n\geqslant 1}(1-q^n)^{-1}=\sum_{s\geqslant 0}p(s)q^s,$$

где $p(s)$ – функция разбиения, можно получить

$$\varphi_{0,\frac{3}{2}}(\tau,z)=\sum_{n\geqslant 0,l\leqslant 24n+1}\left(\frac{12}{n}\right)p\left(n-\frac{l^2-1}{24}\right)q^n\zeta^{\frac{l}{2}}.$$

Рекуррентное соотношение на $a(n,l)$ тогда эквивалентно хорошо известному тождеству

$$s \cdot p(s) = \sum_{t=1}^{s} \sigma_1(t) p(s-t).$$

Уравнения типа Канеко–Загье. Пусть форма

$$\varphi_{k,m}(\tau,z) = \sum_{n\geqslant 0, l\in\mathbb{Z}} a(n,l) q^n \zeta^l \in J^w_{k,m}$$

удовлетворяет каноническому уравнению типа Канеко–Загье. Тогда

$$a(n,l)(4nm-l^2)((4nm-l^2)-(2k+1)) =$$

$$= 24(2k+1)\sum_{s=1}^{n} \sigma_1(s) a(n-s,l)\big((4m+6k-3)s-(4nm-l^2)\big).$$

15 МДУ для форм Якоби индекса 2

Отметим, что наш алгоритм нахождения дифференциальных уравнений работает для форм произвольного индекса. В частности, имеется следующий результат.

Теорема. Общая форма Якоби $\Phi_{0,2} \in J^{w}_{0,2} = \mathbb{C}\langle E_4\varphi^2_{-2,1}, \varphi^2_{0,1}\rangle$ удовлетворяет дифференциальному уравнению минимального порядка 5, за исключением форм

$$\varphi_{0,2}(\tau, z) = \zeta^{\pm 1} + 4 + q(\ldots),$$
$$\psi_{0,2}(\tau, z) = \zeta^{\pm 2} + 22 + q(\ldots),$$
$$\rho_{0,2}(\tau, z) = 2\zeta^{\pm 2} - 11\zeta^{\pm 1} + q(\ldots),$$

удовлетворяющим уравнениям порядка 3, формы

$$\xi_{0,2} = 115\zeta^{\pm 2} + 8624\zeta^{\pm 1} + 37026 + q(\ldots),$$

удовлетворяющей уравнению порядка 4, и формы

$$\sigma_{0,2} = 5\zeta^{\pm 2} - 308\zeta^{\pm 1} - 1122 + q(\ldots),$$

удовлетворяющей уравнению порядка 6.

Уравнения порядка 3

$$H_4H_2H_0(\varphi_{0,2}) - \tfrac{47}{4}E_4H_0(\varphi_{0,2}) + \tfrac{13}{4}E_6\varphi_{0,2} = 0,$$
$$H_4H_2H_0(\psi_{0,2}) - \tfrac{263}{4}E_4H_0(\psi_{0,2}) + \tfrac{121}{4}E_6\psi_{0,2} = 0,$$
$$H_4H_2H_0(\rho_{0,2}) - \tfrac{335}{4}E_4H_0(\rho_{0,2}) - \tfrac{275}{4}E_6\rho_{0,2} = 0.$$

Уравнение порядка 4

$$H_0^{[4]}(\xi_{0,2}) - \tfrac{599}{4}E_4H_0^{[2]}(\xi_{0,2}) - \tfrac{1179}{4}E_6H_0(\xi_{0,2}) + \tfrac{99}{2}E_4^2\xi_{0,2} = 0$$

Уравнение порядка 5

$$H_0^{[5]}(\Phi_{0,2}) - \tfrac{5(7931a+167b)}{308a+5b}E_4H_0^{[3]}(\Phi_{0,2}) + \tfrac{5(137060a+389b)}{4(308a+5b)}E_6H_0^{[2]}(\Phi_{0,2}) +$$
$$+\tfrac{15(723184a+8017b)}{16(308a+5b)}E_4^2H_0(\Phi_{0,2}) - \tfrac{165(13552a+169b)}{16(308a+5b)}E_4E_6\Phi_{0,2} = 0.$$

Уравнение порядка 6

$$H_0^{[6]}(\sigma_{0,2}) - \tfrac{983}{4}E_4H_0^{[4]}(\sigma_{0,2}) + \tfrac{357}{2}E_6H_0^{[3]}(\sigma_{0,2}) + \tfrac{11343}{2}E_4^2H_0^{[2]}(\sigma_{0,2}) +$$
$$+\tfrac{2069}{16}E_4E_6H_0(\sigma_{0,2}) + \tfrac{19217}{16}E_6^2\sigma_{0,2} = 0.$$

16 МДУ для форм Якоби индекса 3

Пространство форм Якоби веса 0 и индекса 3 уже трехмерно

$$J^w_{0,3} = \mathbb{C}\langle E_6\varphi^3_{-2,1}, E_4\varphi^2_{-2,1}\varphi_{0,1}, \varphi^3_{0,1}\rangle.$$

Удобно выбрать другой базис

$$\rho_{0,3} = \frac{1}{48}(26E_6\varphi^3_{-2,1} + 21E_4\varphi^2_{-2,1}\varphi_{0,1} + \varphi^3_{0,1}) =$$

$$= \zeta^{\pm 3} + 34 + q(-186\zeta^{\pm 3} + 2430\zeta^{\pm 2} - 8262\zeta^{\pm 1} + 12036) + q^2(\ldots),$$

$$\psi_{0,3} = -\frac{1}{108}(7E_6\varphi^3_{-2,1} - 6E_4\varphi^2_{-2,1}\varphi_{0,1} - \varphi^3_{0,1}) =$$

$$= \zeta^{\pm 2} + 14 + q(\zeta^{\pm 4} + 40\zeta^{\pm 3} - 76\zeta^{\pm 2} - 168\zeta^{\pm 1} + 406) + q^2(\ldots),$$

$$\varphi_{0,3} = \frac{1}{432}(2E_6\varphi^3_{-2,1} - 3E_4\varphi^2_{-2,1}\varphi_{0,1} + \varphi^3_{0,1}) =$$

$$= \zeta^{\pm 1} + 2 + q(-2\zeta^{\pm 3} - 2\zeta^{\pm 2} + 2\zeta^{\pm 1} + 4) + q^2(\ldots).$$

Произвольная форма веса 0 и индекса 3 может быть представлена в виде

$$\Phi_{0,3} = a\zeta^{\pm 3} + b\zeta^{\pm 2} + c\zeta^{\pm 1} + 2(17a + 7b + c) +$$
$$+ q(b\zeta^{\pm 4} - (186a - 40b + 2c)\zeta^{\pm 3} + (2430a - 76b - 2c)\zeta^{\pm 2} -$$
$$-(8262a + 168b - 2c)\zeta^{\pm 1} + (12036a + 406b + 4c)) + q^2(\ldots).$$

Как мы знаем, форма веса 0 и индекса 3 не может удовлетворять уравнению порядка меньше 3. Оказывается, что порядок три также невозможен. Минимальный порядок равен 4, если ровно два из a, b, c, $17a + 7b + c$ равны 0. Существуют несколько исключительных форм, удовлетворяющих МДУ порядка 5.

Гипотеза. Если ровно один из a, b, c, $17a + 7b + c$ равен 0, то форма Якоби удовлетворяет МДУ порядка 6. Произвольная форма Якоби веса 0 и индекса 3 удовлетворяет МДУ порядка 7. Возможно существует исключительные формы Якоби веса 0 и индекса 3, удовлетворяющие МДУ только порядка 8.

17 Приложения

1. МДУ для гиперкэлеровых многообразий размерности 4. Известны два типа гиперкэлеровых многообразий – это $Hilb^2(K3)$ (схема Гильберта длины 2 для $K3$-поверхности) и обобщённое многообразие Куммера $Kum^2(A)$ двумерного комплексного тора A.

Пусть A_4 – обобщенное многообразие Куммера размерности 4. Его ромб Ходжа определён следующими числами Ходжа:

$$h^{0,0} = h^{0,2} = h^{0,4} = 1, \quad h^{0,1} = h^{0,3} = 0,$$

$$h^{1,1} = 5, \quad h^{1,2} = 4, \quad h^{1,3} = 5, \quad h^{2,2} = 96.$$

Поэтому $\chi_0(A_4) = 3$, $\chi_1(A_4) = -6$, $\chi_2(A_4) = 90$ и

$$\chi(A_4; \tau, z) = 3\zeta^{\pm 2} + 6\zeta^{\pm 1} + 90 + q(\dots) = 3(\psi_{0,2} + 2\varphi_{0,2}).$$

Тогда эллиптический род $\Psi = \chi(A_4; \tau, z)$ удовлетворяет МДУ порядка 5

$$\Big(H_0^{[5]} - \tfrac{13775}{106} E_4 H_0^{[3]} + \tfrac{114865}{212} E_6 H_0^{[2]} + \tfrac{1848045}{848} E_4^2 H_0 - \tfrac{381975}{848} E_4 E_6\Big)(\Psi) = 0.$$

Пусть K_4 соответствует $Hilb^2(K3)$. Ромб Ходжа K_4 определён следующими числами Ходжа:

$$h^{0,0} = h^{0,2} = h^{0,4} = 1, \quad h^{0,1} = h^{0,3} = 0,$$

$$h^{1,1} = 5, \quad h^{1,2} = 0, \quad h^{1,3} = 21, \quad h^{2,2} = 232.$$

Тогда $\chi_0(K_4) = 3$, $\chi_1(K_4) = -42$, $\chi_2(K_4) = 234$ и

$$\chi(A_4; \tau, z) = 3\zeta^{\pm 2} + 42\zeta^{\pm 1} + 234 + q(\dots) = 3(\psi_{0,2} + 14\varphi_{0,2}).$$

Эллиптический род $\Phi = \chi(K_4; \tau, z)$ также удовлетворяет МДУ порядка 5

$$\left(H_0^{[5]} - \tfrac{815}{6} H_0^{[3]} + \tfrac{1885}{4} E_6 H_0^{[2]} + \tfrac{99455}{48} E_4^2 H_0 - \tfrac{20845}{48} E_4 E_6\right)(\Phi) = 0.$$

Также отметим, что для прямого произведения $K3$-поверхностей

$$\chi(K3 \times K3; \tau, z) = 4\varphi_{0,1}(\tau, z)^2 = 4(\psi_{0,2} + 20\varphi_{0,2}),$$

и мы получаем

$$\left(H_0^{[5]} - \tfrac{1105}{8} E_4 H_0^{[3]} + \tfrac{1775}{4} E_6 H_0^{[2]} + \tfrac{64965}{32} E_4^2 H_0 - \tfrac{13695}{32} E_4 E_6\right)(\varphi_{0,1}^2) = 0.$$

2. МДУ порядка 3 и многообразия Калаби–Яу размерности 4

Пусть M_4 – компактное комплексное многообразие размерности 4 с тривиальным первым классом Черна. Тогда эллиптический род M_4 является формой индекса 2 и однозначно определён своим q^0 членом, то есть χ_y-родом Хирцебруха, и

$$q^0[\chi(M_4;\tau,z)] = \chi_0(M_4)\zeta^2 - \chi_1(M_4)\zeta + \chi_2(M_4) - \chi_3(M_4)\zeta^{-1} + \chi_4(M_4)\zeta^{-2}.$$

Пусть M_4 – многообразие Калаби–Яу размерности 4. Мы знаем, что порядок МДУ на $\chi(M_4;\tau,z)$ в таком случае не меньше 3. Согласно

S. Sethi, C. Vafa, E. Witten, *Constraints on low dimensional string compactifications.* Nucl. Phys. B **480** (1996) 213–224,

многообразие Калаби–Яу размерности 4 имеет 4 нетривиальных числа Ходжа $h^{1,1}$, $h^{2,1}$, $h^{3,1}$, $h^{2,2}$ с дополнительным соотношением

$$h^{2,2} = 2(22 + 2h^{1,1} + 2h^{3,1} - h^{2,1}).$$

Мы получаем

$$\chi_0(M_4) = \chi_4(M_4) = 2, \quad \chi_1(M_4) = \chi_3(M_4) = -h^{1,1} + h^{2,1} - h^{3,1},$$

$$\chi_2(M_4) = -2h^{2,1} + h^{2,2} = 44 + 4h^{1,1} + 4h^{3,1} - 4h^{2,1} = 44 - 4\chi_1(M_4).$$

Мы получаем, что имеются МДУ порядка 3 только в случаях

$$2\psi_{0,2}(\tau, z) = (2\zeta^{\pm 2} + 44) + q(\dots) \quad (\Leftrightarrow \chi_1(M_4) = 0)$$

или

$$\rho_{0,2}(\tau, z) = (2\zeta^{\pm 2} - 11\zeta^{\pm 1}) + q(\dots) \quad (\Leftrightarrow \chi_2(M_4) = 0).$$

Это может быть переформулировано в следующее Предложение.

Предложение. Эллиптический род многообразий Калаби-Яу размерности 4 удовлетворяет МДУ минимального возможного порядка, если и только если $h^{2,1} = h^{1,1} + h^{3,1}$ или $h^{2,2} = 2h^{2,1}$, соответственно. Первое условие эквивалентно $e(M_4) = 48$, второе $e(M_4) = -18$.

3. МДУ на некоторые ряды Эйзенштейна–Якоби и производящую функцию "простейшей"алгебры Каца–Муди.

Для любого векторного расслоения E над комплексным многообразием M можно построить автоморфный обобщённый эллиптический род, см.

V. Gritsenko, *Modified Elliptic Genus.* in: V. Gritsenko, V. Spiridonov (Eds.), Partition Functions and Automorphic Forms, in: Moscow Lectures, vol. 5, Springer, 2020, pp. 87–119.

В этом случае областью значений будет биградуированное кольцо почти голоморфных форм $J^{nh,\mathbb{Z}}_{*,*/2}$ с целыми коэффициентами. Голоморфные ряды Эйзенштейна-Якоби $E_{4,1}$, $E_{4,2}$, $E_{6,1}$ и $E_{6,2}$ принадлежат множеству образующих этого кольца.

Ещё одной образующей кольца $J^{nh,\mathbb{Z}}_{*,*/2}$ является рефлективная почти голоморфная форма

$$\psi^{(-1)}_{0,1}(\tau,z) = q^{-1} + (\zeta^{\pm 2} + 70) + q(70\zeta^{\pm 2} + 32384\zeta^{\pm 1} + 131976) + q^2(\dots),$$

которая определяет лоренцеву алгебру Каца–Муди с простейшей матрицей Картана для трёх вещественных простых корней.

Как было упомянуто, $E_{4,1}$ удовлетворяет уравнению типа Канеко-Загье (что следует из одномерности $J_{8,1}$). Остальные ряды удовлетворяют более сложным МДУ.

$$\big(H_6^{[3]} - \tfrac{173}{4}E_4H_6 + 154E_6\big)(E_{6,1}) = 0.$$

$$\big(H_4^{[3]} - \tfrac{95}{4}E_4H_4 + \tfrac{245}{4}E_6\big)(E_{4,2}) = 0.$$

$$\big(H_6^{[4]} - \tfrac{287}{4}E_4H_6^{[2]} + \tfrac{1005}{4}E_6H_6 - 165E_4^2\big)(E_{6,2}) = 0.$$

Так как $\Delta\psi_{0,1}^{(-1)} \in J_{12,1}^w$, мы можем применить наш метод построения МДУ. Оказывается, что

$$\big(H_0^{[3]} - \tfrac{533}{4}E_4H_0 + 874E_6\big)(\psi_{0,1}^{(-1)}) = 0.$$

4. МДУ на степени ϑ.

$$H_{\frac{1}{2}}(\vartheta) = 0,$$

$$(H_1^{[2]} - \tfrac{5}{4}E_4)(\vartheta^2) = 0, \quad (H_{\frac{3}{2}}^{[2]} - 3E_4)(\vartheta^3) = 0,$$

$$(H_2^{[3]} - \tfrac{23}{4}E_4H_2 + \tfrac{81}{4}E_6)(\vartheta^4) = 0, \quad (H_{\frac{5}{2}}^{[3]} - \tfrac{236}{25}E_4H_{\frac{5}{2}} + \tfrac{728}{25}E_6)(\vartheta^5) = 0,$$

$$(H_3^{[4]} - \tfrac{29}{2}E_4H_3^{[2]} + 94E_6H_3 - \tfrac{3575}{16}E_4^2)(\vartheta^6) = 0,$$

$$(H_{\frac{7}{2}}^{[4]} - \tfrac{146}{7}E_4H_{\frac{7}{2}}^{[2]} + \tfrac{42440}{343}E_6H_{\frac{7}{2}} - \tfrac{89505}{343}E_4^2)(\vartheta^7) = 0,$$

$$(H_4^{[5]} - \tfrac{463}{16}E_4H_4^{[3]} + \tfrac{8607}{32}E_6H_4^{[2]} - \tfrac{76769}{64}E_4^2H_4 + \tfrac{284053}{128}E_4E_6)(\vartheta^8) = 0.$$

Этот же результат можно переписать в терминах параболических форм Якоби $\varphi_{10,1} = \eta^{18}\vartheta^2$, $\varphi_{11,2} = \eta^{21}\vartheta(2z)$, $\varphi_{8,2} = \eta^{12}\vartheta^4$, $\varphi_{6,3} = \eta^6\vartheta^6$, $\varphi_{9,6} = \eta^{15}\vartheta^3(2z)$, $\varphi_{7,10} = \eta^9\vartheta^5(2z)$ и $\varphi_{4,14} = \eta^3\vartheta^7(2z)$.

Спасибо за внимание!