Упражнения к курсу “Абелевы расширения полей и теория полей классов”

Математическая школа “Алгебра и теория чисел” в Вороново
30 июня - 6 июля 2024 г.

Часть 1. Дискретные нормирования

Пусть K — некоторое поле. Дискретным нормированием поля K называется сюръективный гомоморфизм ν группы K^* на группу $\mathbb{Z}$ со свойством

$$\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y)) .$$

(Здесь $K^* = K \setminus 0$ — мультипликативная группа поля K.)

Рассмотрим кольцо

$$\mathcal{O}_\nu = 0 \cup \{x \mid x \in K^*, \quad \textit{так что} \quad \nu(x) \geq 0\} .$$

Оно называется кольцом нормирования ν.

Область целостности A (то есть коммутативное кольцо без делителей нуля) называется кольцом дискретного нормирования, если существует дискретное нормирование на поле частных $\mathrm{Frac}(A)$, *для которого A будет кольцом нормирования.*

1. Докажите, что на конечном поле не бывает дискретных нормирований.

2. Покажите, что следующие примеры являются примерами дискретных нормирований и вычислите соответствующие кольца нормирований.

(а) Пусть p — простое число. Тогда $\nu_p : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}$ определяется как $\nu_p(r/s) = \nu_p(r) - \nu_p(s)$, где $r = p^{\nu_p(r)}d$, так что p и $d \in \mathbb{Z}$ взаимно просты, и то же самое для s. Нормирование ν_p называется p-адическим.

(б) По аналогии с предыдущим пунктом постройте дискретное нормирование ν_g на поле рациональных функций $k(t)$ над полем k, где $g \in k[t]$ — неприводимый многочлен.

(в) Пусть k — поле, и $k((t)) = k[[t]][t^{-1}]$ — поле рядов Лорана над полем k, которое есть добавление переменной t^{-1} к полю формальных степенных рядов $k[[t]]$ над полем k. Пусть $f \in k((t))$ и $f = \sum_{n \geq n_0} a_n t^n$, где $a_n \in k$ и $a_{n_0} \neq 0$. Тогда $\nu(f) = n_0$.

(г) Пусть S — риманова поверхность (то есть, одномерное комплексное многообразие), и P — точка на S. Рассмотрим поле мероморфных функций, определенных в некоторой (для каждой функции своей) окрестности точки P. Тогда дискретное нормирование ненулевой функции — это порядок нуля или полюса (со знаком минус) этой функции в точке P.

3. Пусть A — кольцо дискретного нормирования. Докажите, что в кольце A существует единственный максимальный идеал, и любой другой идеал кольца A является его степенью. (Отсюда следует, что A — нётерово кольцо.)

4. Докажите, что следующие условия на коммутативное кольцо A эквивалентны.

(а) Кольцо A — кольцо дискретного нормирования.

(б) Кольцо A — область главных идеалов, которая имеет единственный ненулевой простой идеал m. (Идеал называется простым, если факторкольцо по нему не имеет делителей нуля.)

(в) Кольцо A — область главных идеалов, которая имеет единственный неприводимый элемент (с точностью до умножения на обратимый элемент кольца A).

(г) Кольцо A — область главных идеалов, оно локально и не поле.

Поле A/m называется полем вычетов кольца A или дискретного нормирования ν. Элемент $\pi \in A$ такой, что $\nu(\pi) = 1$, называется локальным параметром дискретного нормирования ν.

5. Пусть K — поле с дискретным нормированием ν, и π — локальный параметр для нормирования ν. Докажите, что любой элемент $x \in K^*$ однозначно представляется в виде $x = \pi^n y$, где $n \in \mathbb{Z}$ и y принадлежит группе обратимых элементов $\mathcal{O}_v^*$ кольца $\mathcal{O}_v$.

6. Пусть K — поле с двумя дискретными нормированиями ν_1 и ν_2. Покажите, что нормирования ν_1 и ν_2 различны, если и только если существует элемент $\pi_1 \in K^*$, такой что $\nu_1(\pi_1) = 1$ и $\nu_2(\pi_1) \neq 1$.

7. Пусть K — поле с дискретным нормированием ν, элемент $\alpha \in K^*$. Докажите, что если $\nu(\alpha) > 0$, то $\nu(\alpha^l(1+\alpha^l)^{-1}) \to +\infty$ при $l \to +\infty$. А если $\nu(\alpha) < 0$, то $\nu(\alpha^l(1+\alpha^l)^{-1} - 1) \to +\infty$ при $l \to +\infty$.

8. Докажите в несколько шагов следующую **аппроксимационную теорему Артина-Уэплза**.

Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — разные дискретные нормирования на поле K. Тогда для любых элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, $c \in \mathbb{Z}$ существует элемент $\alpha \in K$, такой что $\nu_i(\alpha_i - \alpha) > c$ для любого $1 \leq i \leq n$.

Первый шаг. Покажите, что существует элемент $\gamma_1 \in K$, такой что $\nu_1(\gamma_1) \geq 0$, а $\nu_2(\gamma_1) < 0$.

<u>*Указание.*</u> Возьмите элементы $\pi_1, \pi_2 \in K$, такие что

$$\nu_2(\pi_1) \neq 1 = \nu_1(\pi_1), \qquad \nu_1(\pi_2) \neq 1 = \nu_2(\pi_2)\,.$$

Если $\nu_2(\pi_1) < 0$, то возьмите $\gamma_1 = \pi_1$.

Если $\nu_2(\pi_1) \geq 0$, то для $\rho = \pi_2 \pi_1^{-\nu_1(\pi_2)}$ имеем $\nu_2(\rho) \neq 0 = \nu_1(\rho)$. Далее нужно взять $\gamma_1 = \rho$ или $\gamma_1 = \rho^{-1}$.

Второй шаг. Покажите по индукции, что существует элемент $\beta \in K$, такой что $\nu_1(\beta) < 0$, а $\nu_i(\beta) > 0$ для любого $2 \leq i \leq n$.

Указание. База индукции для $n = 2$ следует, если взять $\beta = \gamma_2 \gamma_1^{-1}$, где элемент $\gamma_2 \in K$ такой, что $\nu_2(\gamma_2) \geq 0$, а $\nu_1(\gamma_2) < 0$.

Пусть $n > 2$. Тогда по предположению индукции существует элемент $\delta_1 \in K$, такой что $\nu_1(\delta_1) < 0$, а $\nu_i(\delta_1) > 0$ для любого $2 \leq i \leq n-1$, и существует элемент $\delta_2 \in K$, такой что $\nu_1(\delta_2) < 0$, а $\nu_n(\delta_2) > 0$.

Покажите, что если $\nu_n(\delta_1) > 0$, то подходит элемент $\beta = \delta_1$.

Если $\nu_n(\delta_1) = 0$, то подходит элемент $\beta = \delta_1^l \delta_2$, где число l достаточно большое.

Если $\nu_n(\delta_1) < 0$, то подходит элемент $\beta = \delta_1 \delta_2^l (1 + \delta_2^l)^{-1}$, где число l достаточно большое.

Третий шаг. Выберем элементы $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$, такие что $\nu_i(\beta_i) < 0$, а $\nu_i(\beta_j) > 0$ для $i \neq j$. Положите $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i^l (1+\beta_i^l)^{-1}$. Покажите, что при достаточно большом числе l элемент α — тот, что нам нужен.

Часть 2. Пополнения полей дискретного нормирования.

Пусть K — поле с дискретным нормированием ν, кольцом нормирования $\mathcal{O}_\nu$ и максимальным идеалом m_ν в кольце $\mathcal{O}$. Зафиксируем любое действительное число a, такое что $0 < a < 1$. Положим $\mid x \mid = a^{\nu(x)}$, если $x \neq 0$, и $\mid 0 \mid = 0$.

1. Докажите, что $\mid \cdot \mid$ определяет структуру нормы на поле K, таким образом превращая поле K в метрическое пространство с метрикой $(x, y) \mapsto \mid x - y \mid$. Докажите, что поле K становится тогда топологическим полем (то есть, сложение, умножение и взятие обратного являются непрерывными операциями). При этом база открытых окрестностей нуля в поле K состоит из идеалов m_ν^l, где $l \in \mathbb{N}$.

Как и в любом метрическом пространстве, скажем, что поле дискретного нормирования K полное, если любая последовательность Коши (или, другими словами, фундаментальная последовательность) в поле K имеет предел в этом поле.

2. Докажите, что в полном поле дискретного нормирования K ряд $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$, где $c_n \in K$, сходится в K тогда и только тогда, когда $\nu(c_n) \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

3. Докажите, что полное поле дискретного нормирования состоит из несчетного числа элементов.

4. Пусть K — поле с дискретным нормированием ν (не обязательно полное). Докажите следующие утверждения. Множество B всех последовательностей Коши в поле K является кольцом относительно покомпонентного сложения и умножения последовательностей. Множество M всех последовательностей Коши $(\alpha_n)_{n \geq 0}$, таких что $\alpha_n \to 0$ при $n \to +\infty$, является максимальным идеалом в кольце B.

5. В условиях задачи 4 докажите, что поле B/M есть полное поле дискретного нормирования с дискретным нормированием $\hat{\nu}$, заданным как $\hat{\nu}((\alpha_n)) = \lim \nu(\alpha_n)$ для последовательности Коши $(\alpha_n)_{n\geq 0}$..

Поле $\hat{K}$ с дискретным нормированием $\hat{\nu}$ называется пополнением поля K с дискретным нормированием ν, если поле $\hat{K}$ полное, $\hat{\nu}\mid_K = \nu$, и поле K плотно в поле $\hat{K}$ относительно нормирования $\hat{\nu}$.

6. Докажите, что для любого поля K с дискретным нормированием существует пополнение, которое единственно с точностью до изоморфизма над полем K.

7. Пусть K — поле с дискретным нормированием ν, и поле $\hat{K}$ — его пополнение с дискретным нормированием $\hat{\nu}$. Докажите, что кольцо нормирования $\mathcal{O}_\nu$ поля K плотно в кольце нормирования $\mathcal{O}_{\hat{\nu}}$ поля $\hat{K}$, максимальный идеал m_ν кольца $\mathcal{O}_\nu$ плотен в максимальном идеале $m_{\hat{\nu}}$ кольца $\mathcal{O}_{\hat{\nu}}$, поле вычетов $\mathcal{O}_\nu/m_\nu$ совпадает с полем вычетов $\mathcal{O}_{\hat{\nu}}/m_{\hat{\nu}}$, и кроме того

$$\mathcal{O}_{\hat{\nu}} = \varprojlim_{n\geq 0} \mathcal{O}_\nu/m_\nu^n \qquad \text{и} \qquad \mathcal{O}_{\hat{\nu}}/m_{\hat{\nu}}^l = \mathcal{O}_\nu/m_\nu^l \quad \text{для любого} \quad l \geq 0\,.$$

Пополнение поля $\mathbb{Q}$ относительно нормирования ν_p называется полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, в котором кольцо нормирования $\mathbb{Z}_p$ называется кольцом целых p-адических чисел.

8. Докажите, что поле рядов Лорана $k((t))$ над полем k является пополнением поля рациональных функций $k(t)$ относительно дискретного нормирования ν_t, связанного с неприводимым многочленом t.

9. Докажите, что на поле рациональных функций $k(t)$ над полем k отображение $f/g \mapsto \deg g - \deg f$, где f и g — многочлены, и $\deg$ — степень многочлена, является дискретным нормированием. Чему равно пополнение поля $k(t)$ относительно этого нормирования?

Пусть K — поле с дискретным нормированием, кольцом номирования $\mathcal{O}$ и полем вычетов k относительно этого нормирования. Множество R называется системой представителей, если $R \subset \mathcal{O}$, $0 \in R$, и множество R отображается биективно на поле k при каноническом отображении $\mathcal{O} \to k$.

10. Пусть K — полное поле относительно дискретного нормирования ν. Пусть зафиксирована система представителей R, локальный параметр π и множество элементов $\pi_i \in K$, где $i \in \mathbb{Z}$, так что $\nu(\pi_i) = i$ для любого i. Докажите, что для любого $\alpha \in K^*$ существуют единственно определённые элементы $n \in \mathbb{Z}$, $\theta_i \in R$ для $i \geq 0$, такие что элемент α может быть разложен в бесконечное сходящееся произведение:

$$\alpha = \pi^n \theta_0 \prod_{i\geq 1} (1 + \theta_i \pi_i)\,.$$

11. Сформулируйте и докажите аддитивный аналог мультипликативного утверждения задачи 10.

Часть 3. Лемма Гензеля и её применения

1. Пусть K — поле с дискретным нормированием ν и кольцом нормирования $\mathcal{O}$. Пусть многочлен $f(X) \in \mathcal{O}[X]$, и пусть элемент $a \in \mathcal{O}$ такой, что для некоторого $l \geq 0$ выполнено

$$\nu(f(a)) \geq 2l+1\,, \qquad \text{но при этом} \quad \nu(f'(a)) \leq l\,.$$

Докажите, что тогда существует элемент $b \in \mathcal{O}$, такой что

$$\nu(b-a) \geq l+1 \qquad \text{и} \qquad \nu(f(b)) \geq 2l+2\,.$$

Указание. Будем искать $h \in \mathcal{O}$, так что $b = a + h \cdot \pi^{l+1}$, где π — локальный параметр. Покажите, что тогда выполнено

$$f(b) = f(a) + f'(a) \cdot h \cdot \pi^{l+1} + g\,,$$

где $\nu(g) \geq 2l+2$.

Пусть $n = \nu(f'(a)) \leq l$. Проверьте, что достаточно (и можно) выбрать любой элемент h со свойством

$$\nu\left(\, f(a) \cdot \pi^{-n-l-1} + f'(a) \cdot \pi^{-n} \cdot h \,\right) \geq 1\,.$$

2. Пусть в условиях задачи 1 элемент a удовлетворяет условию: $\nu(f(a)) \geq 2l + r$ для некоторого числа $r \geq 1$. Покажите, что существует элемент $b \in \mathcal{O}$, такой что

$$\nu(b-a) \geq l+r \qquad \text{и} \qquad \nu(f(b)) \geq 2l+r+1\,.$$

3. (**Лемма Гензеля.**) В условиях задачи 1 предположим, что поле K полное. Докажите, что существует элемент $b \in \mathcal{O}$, такой что $f(b) = 0$ и $\nu(b-a) \geq l+1$.

Указание. Найдите последовательность элементов $a, a_2, a_3, \ldots, a_r, \ldots$ из кольца $\mathcal{O}$, такую что

$$\nu(a_r - a_{r-1}) \geq l+r-1 \qquad \text{и} \qquad \nu(f(a_r)) \geq r\,.$$

4. Почему лемму Гензеля называют ещё методом последовательной аппроксимации Ньютона (или методом касательных) нахождения нуля функции?

5. Докажите, что элемент b, существование которого доказывается в лемме Гензеля, единственен.

6. Сформулируйте и докажите аналог леммы Гензеля для многочлена от нескольких переменных.

7. Пусть K — полное поле дискретного нормирования с кольцом нормирования $\mathcal{O}$ и полем вычетов k. Пусть многочлен $f(X) \in \mathcal{O}[X]$, и пусть $\bar{f}[X] \in k[X]$ его редукция по модулю максимального идеала. Пусть элемент $c \in k$ — простой (не кратный) корень многочлена $\bar{f}[X]$. Докажите, что существует единственный корень $b \in \mathcal{O}$ многочлена $f(X)$, такой что его редукция $\bar{b} = c$.

8. Рассмотрим уравнение $Y^2 = X^3 + p$ в кольце $\mathbb{Z}_p$, где p — простое число. Покажите, что решение $(0,0) \in \mathbb{F}_p^2$ этого уравнения после редукции по модулю p не поднимается до решения исходного уравнения в кольце $\mathbb{Z}_p$. Почему не возникает противоречия с леммой Гензеля для нескольких переменных?

9. Пусть K — полное поле дискретного нормирования с полем вычетов k. Пусть $\operatorname{char} K = \operatorname{char} k = 0$. Докажите, что $K \simeq k((t))$.

10. (**Единственность дискретного нормирования на полном поле.**) Пусть на поле K заданы два дискретных нормирования ν_1 и ν_2. Пусть поле K полно относительно нормирования ν_1. Докажите, что в этом случае $\nu_1 = \nu_2$.

Указание. Предположим, что нормирования ν_1 и ν_2 различны. Покажите, что можно выбрать элемент $a \in K$, такой что $\nu_1(a-1) > 0$ и $\nu_2(a) = 1$. Далее извлеките из него корень.

11. Пусть K — полное поле дискретного нормирования. Докажите, что любой изоморфизм поля K на подполе поля K непрерывен, любой автоморфизм полного поля дискретного нормирования является гомеоморфизмом.

12. Рассмотрим простые числа $p \neq s$. Покажите, что поля $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_s$ не изоморфны.

Часть 4. Основная теорема теории Галуа для бесконечных расширений

Пусть E — алгебраическое (возможно, бесконечное) расширение поля F. Тогда $E \supset F$ называется расширением Галуа, если поле E сепарабельно и нормально над полем F. Группа всех автоморфизмов поля F над полем E называется группой Галуа $\mathrm{Gal}(E/F)$.

Из стандартной теории следует, что множество неподвижных элементов $E^{\mathrm{Gal}(E/F)}$ поля E относительно группы $\mathrm{Gal}(E/F)$ *есть F. Кроме того, если K — промежуточное подполе, т. е. $F \subset K \subset E$, то E над K будет расширением Галуа.*

Пусть $\{K_i\,;\, i \in I\}$ — семейство всех конечных расширений Галуа поля F, содержащихся в E. Тогда $E = \bigcup K_i$.

1. Докажите, что
$$\mathrm{Gal}(E/F) = \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Gal}(K_i/F)\,.$$

2. Вычислите явно группу Галуа $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{F}_q)$ алгебраического замыкания E конечного поля $\mathbb{F}_q$.

3. Группы, являющиеся проективными пределами конечных групп, называются проконечными. Пусть
$$H = \varprojlim_{j \in J} H_j$$
проконечная группа, т.е. все H_j — конечные группы. Превратим H в топологическую группу, взяв за базу окрестностей единицы группы множество подгрупп, являющихся ядрами естественных гомоморфизмов из группы H на группы H_j.

Докажите, что группа H компактна, используя теорему Тихонова о том, что декартово произведение компактных топологических пространств есть компактное топологическое пространство. (На декартовом произведении топологических пространств рассматривается стандартная тихоновская топология произведения, которая есть наиболее грубая топология, то есть топология с наименьшим числом открытых множеств, для которой все проекции на группы-сомножители в декартовом произведении непрерывны.)

4. Превратим группу $\mathrm{Gal}(E/F)$ в топологическую группу, взяв за базу открытых окрестностей единицы в группе $\mathrm{Gal}(E/F)$ множество подгрупп $\mathrm{Gal}(E/K_i)$, где $i \in I$. Докажите, что группа $\mathrm{Gal}(E/F)$ компактна.

5. Пусть $K = \bigcup L_j$, где $\{L_j; j \in J\}$ — семейство всех конечных (не обязательно Галуа) расширений поля F, содержащихся в K. Превратим группу $\mathrm{Gal}(E/F)$ в топологическую группу, взяв за базу открытых окрестностей единицы в группе $\mathrm{Gal}(E/F)$ множество подгрупп $\mathrm{Gal}(E/L_i)$, где $i \in I$. Докажите, что так определенная топология на группе $\mathrm{Gal}(E/F)$ совпадает с топологией, определенной в задаче 4.

6. Докажите, что любая открытая подгруппа в топологической группе является также и замкнутой подгруппой. Верно ли обратное?

7. Пусть K — промежуточное подполе, т. е. $F \subset K \subset E$. Докажите, что топология на группе $\mathrm{Gal}(E/K)$ индуцирована с топологии на группе $\mathrm{Gal}(E/F)$, где мы рассматриваем группу $\mathrm{Gal}(E/K)$ как подгруппу в группе $\mathrm{Gal}(E/F)$, а если $K \supset F$ — расширение Галуа, то топология на группе $\mathrm{Gal}(K/F)$ есть фактортопология с топологии на группе $\mathrm{Gal}(E/F)$.

8. Докажите в несколько шагов следующую **основную теорему теории Галуа**, верную также для бесконечных расширений Галуа.

Пусть E — расширение Галуа поля F с группой $\mathrm{Gal}(E/F)$; $\mathcal{L}$ — множество всех замкнутых подгрупп группы $\mathrm{Gal}(E/F)$; $\mathcal{F}$ — множество всех полей, заключенных между E и F. Тогда $K \to \mathrm{Gal}(E/K)$ является взаимно однозначным отображением $\mathcal{F}$ на $\mathcal{L}$. Обратным к нему будет отображение $S \to E^S$, где E^S обозначает поле неподвижных элементов для замкнутой подгруппы S.

Первый шаг. Покажите, что если $K \in \mathcal{F}$, то $\mathrm{Gal}(E/K) \in \mathcal{L}$.

Указание. Покажите, что если $K = \bigcup L_j$, где $\{L_j; j \in J\}$ — семейство всех конечных расширений поля F, содержащихся в K, то $\mathrm{Gal}(E/K) = \bigcap \mathrm{Gal}(E/L_j)$.

Второй шаг. Если $K \in \mathcal{F}$, то $K = E^{\mathrm{Gal}(E/K)}$.

Третий шаг. Пусть S — замкнутая подгруппа группы $\mathrm{Gal}(E/K)$, и пусть $K = E^S$ и $T = \mathrm{Gal}(E/K)$. Ясно, что $S \subset T$. Покажите, что $S = T$.

Указание. Рассмотрите любой открытый нормальный делитель V_i группы T. Пусть $L_i = E^{V_i}$. Из того, что $E^S = E^T$ (по второму шагу), выведите, что $L_i^{T/V_i} = K = L_i^{SV_i/V_i}$. По конечной теории Галуа получите, что $T/V_i = SV_i/V_i$, и, следовательно, $T = SV_i$. Выведите отсюда, что подгруппа S плотна в группе T.

9. Докажите, что полное поле дискретного нормирования локально компактно тогда и только тогда, когда его поле вычетов конечно. (Топологическое пространство называется локально компактным, если каждая его точка допускает окрестность, замыкание которой компактно.) Локально ли компактны поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$?

Часть 5. Теория Куммера и теория Артина-Шрайера

1. Пусть $K = \mathbb{F}_q((t))$, где $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Опишите максимальное абелево расширение Галуа L поля K, так что группа Галуа $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ есть группа показателя $q-1$ (то есть для любого элемента $\sigma \in G$ выполнено $\sigma^{q-1} = 1$). Докажите также, что индекс $\mid L : K \mid$ конечен и определите этот индекс.

2. Пусть $K = k((t))$, где k — алгебраически замкнутое поле. Опишите максимальное абелево расширение Галуа L поля K, так что группа Галуа $\mathrm{Gal}(L/K)$ есть группа показателя m, так что характеристика поля k не делит m (или k — поле характеристики нуль). Докажите также, что индекс $\mid L : K \mid$ конечен и определите этот индекс.

3. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов, где $q = p^f$ и p — простое число. Докажите, что уравнение $x^p - x - a = 0$, где $a \in \mathbb{F}_q$, разрешимо в поле $\mathbb{F}_q$ если и только если $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(a) = 0$. (Предложите другое доказательство, не использующее аддитивную теорему Гильберта 90 из лекций, а рассматривая аддитивный гомоморфизм $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$, $b \mapsto b^p - b$.)

4. Пусть $K = k((t))$, где k — совершенное поле характеристики $p > 0$. Пусть F — автоморфизм Фробениуса: $x \mapsto x^p$. Пусть $\mathcal{R}$ фиксированная система представителей из $k/(F-1)k$ в k. Докажите, что каждый элемент $f \in K$ по модулю $(F-1)K$ имеет единственное представление в виде следующей конечной суммы:

$$f = \sum_{\substack{l \le 0 \\ p \nmid l}} f_l t^l,$$

где все $f_l \in k$ и $f_o \in \mathcal{R}$. Примените полученное утверждение к описанию максимального абелевого расширения поля K, имеющего показатель p.

Часть 6. Векторы (или p-векторы) Витта

Далее везде под кольцом векторов Витта $W(k)$ подразумевается кольцо p-векторов Витта, где p — простое число.

1. Пусть k — совершенное поле характеристики $p > 0$. Из кольца векторов Витта $W(k)$ можно определить отображение ν в группу $\mathbb{Z}$, а именно для $x \in W(k)$ положив $\nu(x) = r$, где x_r — первая ненулевая компонента вектора x. Покажите, что отображение ν продолжается до дискретного нормирования на поле частных $\operatorname{Frac} W(k)$ кольца векторов Витта. Покажите, что поле $\operatorname{Frac} W(k)$ — полное, и кольцо $W(k)$ является кольцом нормирования в поле $\operatorname{Frac} W(k)$. Покажите, что максимальный идеал в кольце $W(k)$ состоит из тех векторов Витта x, у которых $x_0 = 0$, и, таким образом, он равен $pW(k)$.

2. Пусть K — поле с дискретным нормированием, $\mathcal{O}$ — соответствующее кольцо нормирования и π — локальный параметр в кольце $\mathcal{O}$, причем поле вычетов $k = \mathcal{O}/(\pi\mathcal{O})$ имеет характеристику $p > 0$. Докажите, что если $a, b \in \mathcal{O}$ и $a \equiv b \pmod{\pi^r}$, где $r > 0$, то $a^{p^n} \equiv b^{p^n} \pmod{\pi^{r+n}}$ для всех целых $n \geq 0$.

3. Сохраним обозначения и предположения из задачи 2. Предположим также, что поле K полное относительно заданного дискретного нормирования и поле вычетов k совершенно. Покажите, что в кольце $\mathcal{O}$ существует система представителей R для множества $k = \mathcal{O}/(\pi\mathcal{O})$, такая что $R^p = R$ (то есть возведение в степень p отображает множество R на себя), и что такая система представителей единственна. (Элементы из системы представителей R называются представителями Тейхмюллера).

Указание. Пусть α — некоторый класс вычетов из поля k. Для всякого целого числа $v \geq 0$ пусть a_v — представитель в кольце $\mathcal{O}$ класса $\alpha^{p^{-v}}$. Покажите, что последовательность $(a_v)^{p^v}$ сходится при $v \to \infty$ к представителю a класса α, так что этот представитель не зависит от выбора элементов a_v.

4. Сохраним обозначения и предположения из задачи 3. Покажите, что система представителей Тейхмюллера R (существование и единственность которой показаны в задаче 3) замкнута относительно умножения, а если к тому же поле K имеет характеристику $p > 0$, то система R замкнута также относительно сложения, и, следовательно, изоморфна полю вычетов k.

5. Пусть K — полное поле относительно дискретного нормирования, $\operatorname{char} K = p > 0$, и поле вычетов k совершенно. Докажите, что $K \simeq k((t))$.

Замечание. На самом деле верно более общее утверждение. Пусть K — полное поле дискретного нормирования с полем вычетов k, и $\operatorname{char} K = \operatorname{char} k$. Тогда $K \simeq k((t))$. (Сравните с задачей 9 из части 3.)

6. Решите задачу 1 из части 5, если в условии той задачи поле K заменить на произвольное полное поле дискретного нормирования с конечным полем вычетов $\mathbb{F}_q$.

7. Пусть K — полное поле относительно дискретного нормирования, $\operatorname{char} K = 0$, поле вычетов k совершенное и $\operatorname{char} k = p > 0$. Сопоставим каждому вектору Витта $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ из кольца $W(k)$ элемент $\sum\limits_{i \geq 0} \xi_i^{p^{-i}} p^i$ из поля F, где ξ_i — представитель Тейхмюллера элемента x_i (см. задачу 3). Покажите, что построенное отображение есть гомоморфизм колец и задает вложение кольца $W(k)$ в кольцо дискретного нормирования $\mathcal{O}$ поля K.

Указание. Проверку того, что построенное отображение сохраняет сложение и умножение, достаточно проводить по модулю p^{n+1} для всех $n > 0$. При фиксированном n сделайте замену $y_i = \xi_i^{p^{-n}}$ (эта замена индуцирует автоморфизм кольца $W_{n+1}(k)$). После этой замены исследуемое отображение по модулю p^{n+1} выглядит как переход к n-ой призрачной координате от вектора $(y_0, \ldots, y_n)$. Воспользуйтесь также следующим утверждением (которое было на лекциях): пусть элементы $a = (a_1, a_2, \ldots)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots)$ принадлежат кольцу $W(L)$, где L — некоторое кольцо, тогда если $a_i \equiv b_i \pmod p$, то для призрачных компонент имеем $a^{(i)} \equiv b^{(i)} \pmod{p^{i+1}}$ для всех $i \geq 0$.

8. Покажите, что есть изоморфизм колец $W(\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}_p$, где $\mathbb{F}_p$ — конечное поле из p элементов, и

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

есть кольцо целых p-адических чисел.

9. Пусть $E \supset \mathbb{Q}_p$ — конечное расширение полей, где p — простое число. Пусть поле вычетов поля E — это конечное поле $\mathbb{F}_q$, где $q = p^f$. Покажите, что имеется башня расширений полей:

$$E \ \supset \ \operatorname{Frac} W(\mathbb{F}_q) \ \supset \ \mathbb{Q}_p,$$

где $\mathbb{Q}_p = \operatorname{Frac} \mathbb{Z}_p$ есть поле p-адических чисел.

Докажите, что поле $\operatorname{Frac} W(\mathbb{F}_q)$ является максимальным неразветвленным расширением поля $\mathbb{Q}_p$ в поле E (в данном случае это означает, что идеал $pW(\mathbb{F}_q)$ максимален в кольце $W(\mathbb{F}_q)$).

Часть 7. Ручной символ.

1. Пусть L — поле с дискретным нормированием $\nu : L^* \to \mathbb{Z}$. Тогда для ручного символа

$$(\cdot,\cdot)_\nu \ : \ L^* \times L^* \longrightarrow \bar{L}^*, \qquad (a,b)_\nu = (-1)^{\nu(a)\nu(b)} \overline{\left(\frac{a^{\nu(b)}}{b^{\nu(a)}}\right)},$$

где $\bar{L}$ — поле вычетов поля L, докажите свойство Стейнберга:

$$(a, 1-a)_\nu = 1 \quad \text{для любого} \quad a \in L^*, \quad \text{такого что} \quad 1-a \neq 0.$$

2. Пусть K — полное поле дискретного нормирования с конечным полем вычетов $\mathbb{F}_q$. Докажите, что ручной символ определяет невырожденное спаривание группы $K^*/(K^*)^{q-1}$ с собой.

3. Для любого поля L определим «группу символов» (или вторую алгебраическую K-группу):

$$K_2(L) = (L^* \otimes_{\mathbb{Z}} L^*)/F\,,$$

где подгруппа F порождена всеми элементами $a \otimes (1-a)$, где $a \in L^*$, $1-a \in L^*$. Для любых элементов a, b из группы L^* будем обозначать образ элемента $a \otimes b$ в группе $K_2(L)$ как $\{a, b\}$. Закон композиции в группе $K_2(L)$ будем обозначать как умножение, а единичный элемент группы $K_2(L)$ как 1. Докажите, что

$$\{a,b\} = \{b,a\}^{-1}\,, \qquad \{a,-a\} = 1\,, \qquad \{a,a\} = \{-1,a\}.$$

4.* Докажите что группа $K_2(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — конечное поле, тривиальна.

Часть 8. Дифференциалы и вычет.

Пусть $K \supset k$ — любое расширение полей. Модуль k-дифференциалов $D_k(K)$ поля K есть K-векторное пространство и определяется следующим образом

$$D_k(K) = (K \otimes_k K)/Q\,,$$

где K-векторное подпространство Q порождено любыми элементами вида

$$f \otimes (g_1 g_2) - f g_1 \otimes g_2 - f g_2 \otimes g_1.$$

Обычно образ элемента $f \otimes g$ в пространстве $D_k(K)$ записывается как дифференциал $f\,dg$. При этом возникает стандартное соотношение для дифференциала произведения

$$f\,d(g_1 g_2) = f g_1\,dg_2 + f g_2\,dg_1\,.$$

1. Пусть $K = k((t))$, где k — совершенное поле, $\operatorname{char} k = p > 0$. Докажите, что $\dim_K D_k(K) = 1$. Кроме того, элемент dt является базисом векторного пространства $D_k(K)$ над K, и для любого элемента f из поля K в пространстве $D_k(K)$ выполнено $df = f'_t\,dt$, где f'_t — формальная производная ряда f по t.

Пусть $K = k((t))$, где k — любое поле. Определим K-векторное пространство $D'(K) = D_k(K)/S$, где K-векторное подпространство S порождено всеми элементами вида $df - f'_t\,dt$.

Определим отображение вычета

$$\mathrm{res}_t : D_k(K) \longrightarrow D'_k(K) \xrightarrow{\gamma} k \ , \qquad\qquad \gamma\left((\sum_i a_i t^i)dt\right) = a_{-1} \, .$$

2. Проверьте, что K-подпространство S не зависит от выбора локального параметра t.

3. Пусть $K = k((t))$, где k — любое поле. Докажите, что $\dim_K D'_k(K) = 1$. Кроме того, элемент dt является базисом векторного пространства $D'_k(K)$ над K, и для любого элемента f из поля K в пространстве $D'_k(K)$ выполнено $df = f'_t \, dt$.

Зачем надо было переходить от $D_k(K)$ к $D'_k(K)$?

4. Пусть $K = k((t))$, где k — любое поле. Проверьте следующие свойства вычета.

(а) Отображение res_t является k-линейным.

(б) $\mathrm{res}_t(f\, dg) = 0$, если $\nu(f) \geq 0$ и $\nu(g) \geq 0$.

(в) $\mathrm{res}_t(dh) = 0$ для любого элемента $h \in K$.

(г) $\mathrm{res}_t(g^{-1}\, dg) = \nu(g)$ для любого элемента $g \in K^*$.

5. Докажите следующий принцип продолжения алгебраических тождеств. Пусть многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ таков, что $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для любых элементов $a_1, \dots, a_n$ из фиксированного поля k характеристики нуль. Докажите, что многочлен f тождественно равен нулю.

6. Пусть $K = k((t))$, где k — любое поле. Докажите, что отображение вычета не зависит от выбора локального параметра в поле K.

<u>*Указание.*</u> Пусть u — другой локальный параметр. Достаточно доказать, что $\mathrm{res}_t(u^{-n}\, du) = 0$ при $n \geq 2$. В случае $\mathrm{char}\, k = 0$ это просто. В случае $\mathrm{char}\, k = p > 0$ воспользуйтесь принципом продолжения алгебраических тождеств.

7. Пусть $K = k((t))$, где $\mathrm{char}\, k = p > 0$. Докажите, что для любых элементов $f \in K$, $g \in K^*$ выполнено

$$\mathrm{res}\left(f^p \frac{dg}{g}\right) = (\mathrm{res}\left(f \frac{dg}{g}\right)^p \, .$$

Пусть поле $K = \mathbb{F}_q((t))$, где $\mathbb{F}_q$ — конечное поле характеристики p. Определим отображение

$$(\cdot\, , \cdot] \ : \ K \times K^* \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ , \qquad\qquad (f, g] = \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p} \mathrm{res}\left(f \frac{dg}{g}\right) \, .$$

8. Докажите, что отображение $(\cdot\, , \cdot]$ определяет непрерывное невырожденное спаривание между дискретной группой $K/\mathfrak{p}(K)$ и компактной группой $K^*/(K^*)^p$, где отображение $\mathfrak{p} : K \to K$ задано как $\mathfrak{p}(f) = f^p - f$.