Арифметика и геометрия дробей Фарея

М.А. Королёв*

*Математический институт им. В.А. Стеклова (Москва)

Школа «Алгебра и теория чисел-2024»

Вороново, 2 июля 2024 года

Классический **ряд Фарея**:

$$\Phi(Q) = \left\{ \frac{a}{b} \,:\, 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant Q, (a,b) = 1 \right\}$$

Индуктивное построение:

$$\Phi(1) = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

Пусть ряд $\Phi(Q-1)$ уже построен, и $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ - произвольная пара соседних дробей в $\Phi(Q-1)$. Медианта:

$$\frac{c+a}{d+b}$$

Для неё всегда имеем

$$\frac{c}{d} < \frac{c+a}{d+b} < \frac{a}{b}.$$

Если $d+b \leqslant Q$, то медианта включается в ряд $\Phi(Q)$. В противном случае дроби $\dfrac{c}{d} < \dfrac{a}{b}$ остаются соседними и в $\Phi(Q)$.

Определение и свойства ряда Фарея

$$\Phi(2) = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2} = \frac{0+1}{1+1}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$\Phi(3) = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$\Phi(4) = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$\Phi(5) = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$\Phi(6) = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$\Phi(7) = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1} \right\}$$

Дж. Фарей (John Farey, 1816), «**On a curious Property of vulgar Fractions**», *The Philosophical magazine; a journal of theoretical, experimental and applied physics*, 1816, vol. 47, pp. 385–386.

Наблюдение (на частных случаях): в ряде несократимых дробей $0 < a/b \leqslant 1$ со знаменателями $\leqslant Q$ всякая дробь (кроме двух крайних) есть медианта двух соседних дробей:

$$\Phi(5) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\},$$

$$\frac{1}{5} = \frac{0+1}{1+4}, \quad \frac{1}{4} = \frac{1+1}{5+3}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1+2}{4+5}, \quad \frac{2}{5} = \frac{1+1}{3+2}, \quad \text{и т.д.}$$

О.Л. Коши (Augustin Louis Cauchy, 1816), «**Démonstration d'un Théorème Curieux sur Les Nombres**», Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique de Paris, Vol. 3, No. 3 (1816), pp. 133–135. - Доказательство.

LXXIX. *On a curious Property of vulgar Fractions.* By *Mr.* J. Farey, *Sen.*

To Mr. Tilloch.

Sir, — On examining lately, some very curious and elaborate Tables of "Complete decimal Quotients," calculated by Henry Goodwyn, Esq. of Blackheath, of which he has printed a copious specimen, for private circulation among curious and practical calculators, preparatory to the printing of the whole of these useful Tables, if sufficient encouragement, either public or individual, should appear to warrant such a step: I was fortunate while so doing, to deduce from them the following general property; viz.

If all the possible vulgar fractions of different values, whose greatest denominator (when in their lowest terms) does not exceed any given number, be arranged in the order of their values, or quotients; then if both the numerator and the denominator of any fraction therein, be added to the numerator and the denominator, respectively, of the fraction next but one to it (on either side), the sums will give the fraction next to it; although, perhaps, not in its lowest terms.

For example, if 5 be the greatest denominator given; then are all the possible fractions, when arranged, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, and $\frac{4}{5}$; taking $\frac{1}{3}$ as the given fraction, we have $\frac{1+1}{5+3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ the next smaller fraction than $\frac{1}{3}$; or, $\frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$, the next larger fraction to $\frac{1}{3}$. Again, if 99 be the largest denominator, then, in a part of the arranged Table, we should have $\frac{15}{52}$, $\frac{28}{97}$, $\frac{13}{45}$, $\frac{24}{83}$, $\frac{11}{38}$, &c.; and if the third of these fractions be given, we have $\frac{15+13}{52+45} = \frac{28}{97}$ the second: or $\frac{13+11}{45+38} = \frac{24}{83}$ the fourth of them: and so in all the other cases.

I am not acquainted, whether this curious property of vulgar fractions has been before pointed out?; or whether it may admit of any easy or general demonstration?; which are points on which I should be glad to learn the sentiments of some of your mathematical readers; and am

Sir,

Your obedient humble servant,

Howland-street. J. Farey.

Заметка Дж. Фарея (1816).

Ш. Аро (Charles Haros, при составлении таблиц перевода обыкновенных дробей (со знаменателями $\leqslant 99$) в десятичные (опубликованы в 1801 г.: «**Instruction Abrégée sur les nouvelles Mesures qui dovient étre introduites dans toute république, au vendémiaire an 10; avec tables de rapports et reductions**» - «**Краткая инструкция о новых мерах, которые должны быть введены во всей республике с вандемьера X года**») для контроля за полнотой ряда несократимых дробей a/b, $b < 100$, пользовался процедурой построения медиант, отправляясь от ряда вида

$$\left\{\frac{1}{99}, \frac{1}{98}, \frac{1}{97}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{96}{97}, \frac{97}{98}, \frac{98}{99}\right\}.$$

Н. Шюке (Nicolas Chuquet, ок. 1445 — ок. 1488): процедура взятия медианты двух дробей («правило средних чисел»): трактат «**Le triparty en la science des nombres**» - «**Наука о числах в трёх частях**» (опубл. в 1520).

Сколько дробей в ряде Фарея имеют один и тот же знаменатель q?

$$q = 10 \;\Rightarrow\; \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{10}{10}$$ - 4 дроби,

$$q = 11 \;\Rightarrow\; \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{4}{11}, \frac{5}{11}, \frac{6}{11}, \frac{7}{11}, \frac{8}{11}, \frac{9}{11}, \frac{10}{11}, \frac{11}{11}$$ - 10 дробей,

В общем случае: количество чисел a ряда $1, 2, 3, \ldots, q-1, q$, взаимно-простых с q. Это количество обозначается $\varphi(q)$.

Функция $\varphi(q)$ называется функцией Эйлера.

Если $p_1, \ldots, p_k$ - все различные простые делители q, то

$$\varphi(q) = q\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = q\prod_{p|q}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

$$\varphi(10) = 10\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 4, \quad \varphi(11) = 11\left(1 - \frac{1}{11}\right) = 10.$$

Сколько дробей содержит ряд $\Phi(Q)$?

$$N = N(Q) = |\Phi(Q)| \quad \text{- число дробей в } \Phi(Q) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(Q) = 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(Q)\,.$$

Иначе говоря, вычислить $N(Q)$ - то же самое, что вычислить «среднее значение» функции Эйлера на промежутке $1 \leqslant q \leqslant Q$. Оказывается:

$$N(Q) = c \cdot Q^2 + O(Q \ln Q),$$

$$c = \frac{1}{2}\biggl(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\biggr)^{-1} = \prod_p \biggl(1 - \frac{1}{p^2}\biggr) = \frac{3}{\pi^2}.$$

«Модулярное свойство».

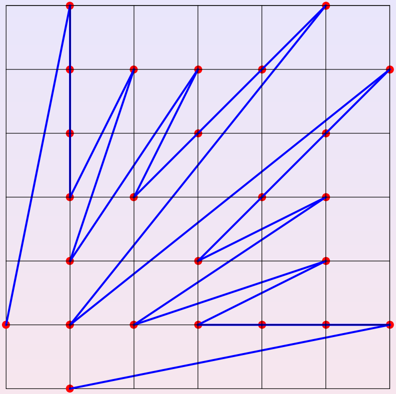
Если $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ - соседние дроби в ряде $\Phi(Q)$, то $ad - bc = 1$:

$$\Phi(5) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\},$$

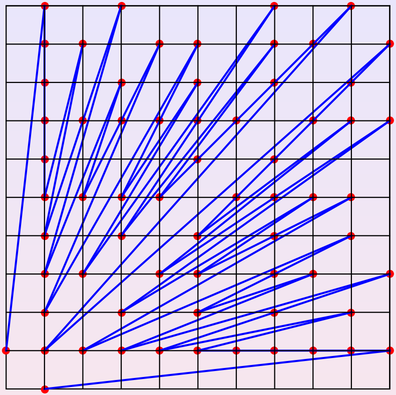
$$\frac{1}{3} < \frac{2}{5} \Rightarrow 2\cdot 3 - 5\cdot 1 = 1; \quad \frac{3}{5} < \frac{2}{3} \Rightarrow 2\cdot 5 - 3\cdot 3 = 1$$

(достаточно проверить для ряда $\Phi(1)$ и убедиться, что если свойство выполнялось для пары $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, то оно сохранится и при замене соответствующей дроби медиантой).

Визуализация ряда Фарея



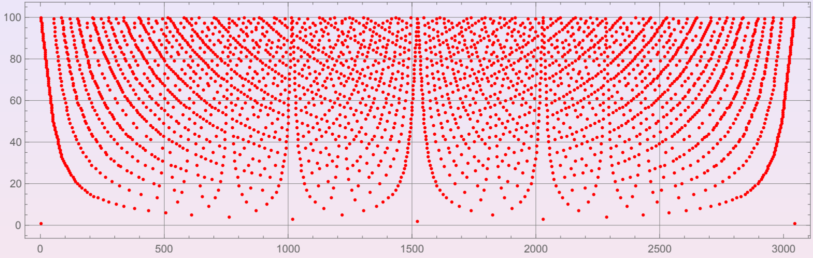
$Q = 6$



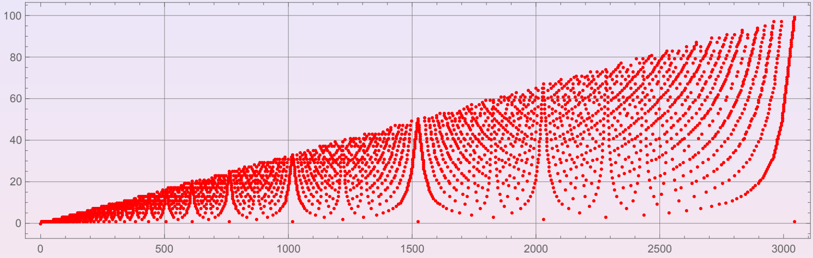
$Q = 10$

Вершины многоугольников - точки с координатами (a, b) и (b, a), где $a/b \in \Phi(Q)$.

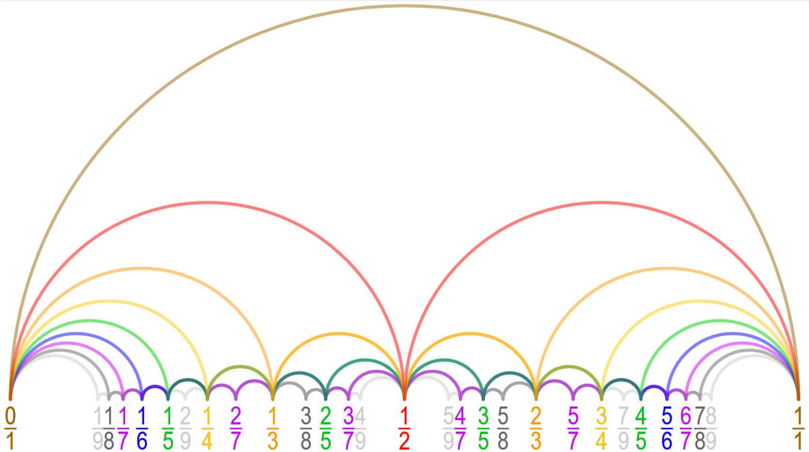
Визуализация ряда Фарея



Ордината $\boldsymbol{k}$-й точки - знаменатель $\boldsymbol{k}$-й дроби $\boldsymbol{a/b \in \Phi(Q)}$, $\boldsymbol{Q = 100}$.



Ордината $\boldsymbol{k}$-й точки - числитель $\boldsymbol{k}$-й дроби $\boldsymbol{a/b} \in \Phi(\boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{Q} = \mathbf{100}$.



Полуокружности с концами в точках $a/b \in \Phi(Q)$, $Q = 9$.

Дроби Фарея - полезный инструмент в аналитической теории чисел.

Георгий Феодосиевич Вороной (1868 — 1908)

Новая оценка остаточного члена в **проблеме делителей Дирихле**.

Годфри Харольд Харди
(1877 - 1947)

Сриниваса Рамануджан
(1887 — 1920)

Асимптотический ряд для функции $p(n)$, равной числу разбиений целого $n \geqslant 1$ на слагаемые:

$$n = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + \ldots + n \cdot x_n, \quad x_j \geqslant 0.$$

Хендрик Дауве Клостерман (1900 — 1968)

«Асимптотическая» формула для числа представлений целого $n \geqslant 1$ в виде суммы

$$n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2,$$

где $a, b, c, d > 0$ - фиксированные целые числа, x, y, z, t - целочисленные переменные.

Ряды Фарея: связь с гипотезой Римана

Дзета-функция Римана:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma = \operatorname{Re} s > 1.$$

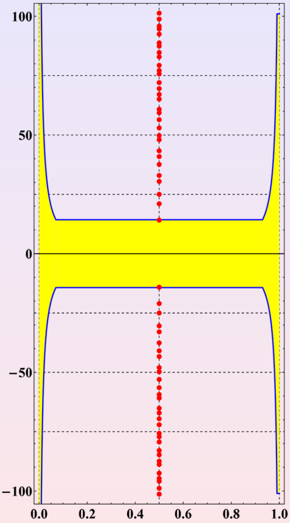
Дзета-функция Римана продолжается на всю комплексную плоскость за исключением точки $s = 1$. Она имеет бесконечно много нулей:

а) «тривиальные» нули в точках $s = -2, -4, -6, \ldots$;

б) «нетривиальные» нули в вертикальной полосе $0 < \sigma < 1$.

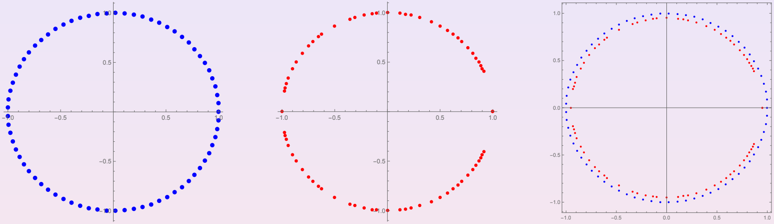
От нашего знания о том, где расположены нетривиальные нули $\zeta(s)$ зависит точность многих утверждений о поведении простых чисел. Гипотеза Римана (RH) утверждает, что все эти нули лежат на одной прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ («критическая прямая»).

Ряды Фарея: связь с гипотезой Римана



Ряды Фарея: связь с гипотезой Римана

Гипотеза Римана может быть переформулирована на языке дробей Фарея.



«Равномерная сетка» с шагом $\mathbf{1/N(Q)}$ и дроби Фарея ряда $\mathbf{\Phi(Q)}$, $\boldsymbol{Q = 15}$.

$\delta_n = r_n - \dfrac{n}{N}$ - «отклонение» n-й дроби от точки равномерной сетки.

Ж. Франель (Jerome Franel, 1924):

$$S_2(Q) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n^2 \ll Q^{-1+\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{RH верна.}$$

Э. Ландау (Edmund Landau, 1924):

$$S_1(Q) = \sum_{n=1}^{N} |\delta_n| \ll Q^{1/2+\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{RH верна.}$$

Q	$S_1(Q)/\sqrt{Q}$	$Q \cdot S_2(Q)$
10	0.2065	0.2030
50	0.2277	0.4445
100	0.2089	0.4968
200	0.2360	0.6092
500	0.1805	0.6127
1000	0.1637	0.6348

Дроби Фарея - источник нетривиальных задач.

Рассмотрим сумму
$$S(Q) = \sum_{n=1}^{N} (r_n - r_{n-1})^2$$
Так как $N(Q) \sim Q^2$, то естественно ожидать, что «в среднем»
$$r_n - r_{n-1} \asymp \frac{1}{Q^2}, \quad (r_n - r_{n-1})^2 \asymp \frac{1}{Q^4}, \quad S(Q) \sim \frac{N(Q)}{Q^4} \asymp \frac{1}{Q^2}.$$
В действительности
$$S(Q) \asymp \frac{\ln Q}{Q^2}$$

Средние расстояния между соседями

Р. Холл (Richard Hall, 1970) и др.:

$$S(Q) = \frac{12}{\pi^2}\frac{1}{Q^2}\left(\ln Q + \frac{1}{2} + \gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + O\left(\frac{\ln^2 Q}{Q^3}\right)$$

(здесь γ - постоянная Эйлера).

Положим для фиксированного целого $h \geqslant 2$

$$S(Q;h) = \sum_{n=1}^{N}(r_{n+h} - r_n)^2$$

Теорема (Р. Холл, 1994):

$$S(Q;2) = \frac{36}{\pi^2}\frac{\ln Q}{Q^2}(1 + o(1)).$$

Гипотеза (Р. Холл, 1994): при любом фиксированном $h \geqslant 2$ выполнено равенство

$$S(Q;h) = \frac{12}{\pi^2} \cdot \frac{1}{Q^2}\Big(C_h \ln Q + D_h\Big) + o_h(Q^{-2}).$$

Доказательство гипотезы Холла: Florin Boca, Cristian Cobeli, Alexandru Zaharescu, 2001:

$$C_h = 2h - 1,$$

$$D_h = (2h-1)\left(\gamma - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + \frac{h}{2} + \sum_{r=1}^{h-1}(h-r)I_r.$$

Постоянные I_r могут быть выражены в терминах некоторого геометрического преобразования T, введённого авторами (BCZ-преобразование).

Рассмотрим несколько подряд идущих дробей ряда $\mathbf{\Phi(9)}$, например:

$$\cdots < \frac{2}{9} < \frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2} < \frac{5}{9} < \cdots$$

и тройки соседних знаменателей:

(q_0, q_1, q_2)	$q_0 + q_2$	q_1	k
(9,4,7)	9+7=16	4	4
(4,7,3)	4+3=7	7	1
(7,3,8)	7+8=15	3	5
(3,8,5)	3+5=8	8	1
(8,5,7)	8+7=15	5	3
(5,7,9)	5+9=14	7	2
(7,9,2)	7+2=9	9	1
(9,2,9)	9+9=18	2	9

Соседние знаменатели

Всегда справедливо равенство: $q_0 + q_2 = kq_1$, где k - целое число (оно называется *индексом дроби* a_1/q_1) Можно показать, что

$$k = \left[\frac{q_0 + Q}{q_1}\right].$$

Зная Q, q_0 и q_1, можно восстановить все остальные знаменатели:

$$\begin{aligned} k_1 &:= \big[(q_0 + Q)/q_1\big], & q_2 &= k_1 q_1 - q_0, \\ k_2 &:= \big[(q_1 + Q)/q_2\big], & q_3 &= k_2 q_2 - q_1, \\ k_3 &:= \big[(q_2 + Q)/q_3\big], & q_4 &= k_3 q_3 - q_2 \end{aligned}$$

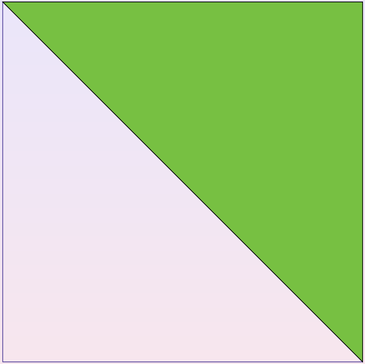
и т. д. Подобные соотношения можно написать и для числителей. Перепишем равенство для индекса k в виде

$$k = \left[\frac{1 + q_0/Q}{q_1/Q}\right]$$

и заметим, что числа $x = q_0/Q$, $y = q_1/Q$ удовлетворяют неравенствам:

$$0 < x \leqslant 1, \quad 0 < y \leqslant 1, \quad x + y = \frac{q_0 + q_1}{Q} > 1.$$

Точка (x, y) лежит в «**треугольнике Фарея**» $\mathcal{T}$ – области вида



При этом:

$$q_2 = kq_1 - q_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_2}{Q} = k \cdot \frac{q_1}{Q} - \frac{q_0}{Q} = ky - x = \left[\frac{1+x}{y}\right] y - x$$

BCZ-преобразование

Идея Бока-Кобели-Захареску: определить для произвольной точки $(x, y) \in \mathcal{T}$ **преобразование BCZ** $T = T(x, y)$ следующим образом:

$$T(x, y) = (y, ky - x), \quad k = \left[\frac{1 + x}{y}\right].$$

Тогда

$$T\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right).$$

Иначе говоря, преобразование T позволяет сдвигаться вправо вдоль последовательности знаменателей.

Где в треугольнике Фарея коэффициент

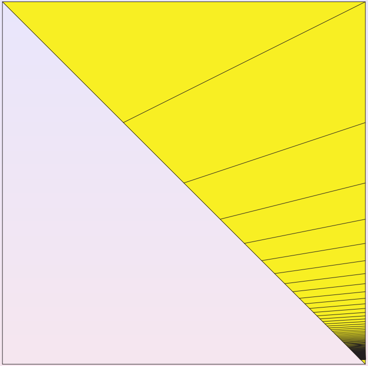
$$\left[\frac{1+x}{y}\right]$$

сохраняет одно и то же значение?
Это область $\mathcal{T}(k) \subset \mathcal{T}$, определяемая условиями

$$k \leqslant \frac{1+x}{y} < k+1$$

или, что то же, условиями

$$\frac{1+x}{k+1} < y \leqslant \frac{1+x}{k},$$
$$0 < x, y \leqslant 1, \quad x+y > 1.$$



Области $\boldsymbol{\mathcal{T}(k)}$, $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, \ldots}$.

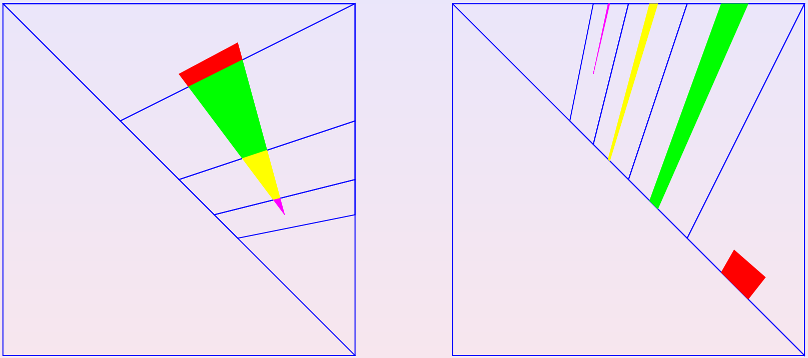
Их площади:

$$|\boldsymbol{\mathcal{T}(1)}| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}, \quad |\boldsymbol{\mathcal{T}(k)}| = \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{k(k+1)(k+2)}}, \quad k \geqslant 2.$$

Внутри $\mathcal{T}(k)$ будем иметь:

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}, \quad \det \frac{\partial T(x,y)}{\partial(x,y)} = 1.$$

Следовательно, отображение $T|_{\mathcal{T}(k)}$ сохраняет площади, хотя и не является непрерывным



Треугольник с вершинами $(\frac{1}{2}, \frac{4}{5})$, $(\frac{2}{3}, \frac{8}{9})$, $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$
и его образ при BCZ-преобразовании.

BCZ-преобразование и арифметические свойства дробей Фарея

Преобразование $\boldsymbol{T}$ позволяет изучать арифметические свойства дробей Фарея. Пример такой задачи:

Пусть $k \geqslant 1$ *- фиксированное целое число. Найти асимптотику для* $N(k;Q)$ *- числа дробей ряда* $\Phi(Q)$, *индекс которых равен* k.

Решение: если $a_0/q_0 < a_1/q_1$ - соседние дроби, причём индекс a_1/q_1 равен k, то

$$k = \left[\frac{1+q_0/Q}{q_1/Q}\right] \Rightarrow \left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) \in \mathcal{T}(k) \Rightarrow (q_0, q_1) \in Q \cdot \mathcal{T}(k).$$

Однако $\textbf{Н.О.Д.}(q_0, q_1) = 1$, так что (q_0, q_1) - примитивная точка области $Q \cdot \mathcal{T}(k)$. Верно и обратное: по примитивной точке можно восстановить пару дробей с нужным свойством. Следовательно,

$$N(k;Q) = \#\{(q_0, q_1) \in Q \cdot \mathcal{T}(k) - \text{примитивная}\} \sim \frac{6}{\pi^2}\,|\mathcal{T}(k)|Q^2,$$

$$\nu(k;Q) = \frac{N(k;Q)}{N(Q)} \sim \frac{(6/\pi^2)|\mathcal{T}(k)|Q^2}{(3/\pi^2)Q^2} \to 2|\mathcal{T}(k)|, \quad Q \to +\infty$$

Численные значения долей $\nu(k)$

$$\nu(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & k = 1; \\ \dfrac{8}{k(k+1)(k+2)}, & k \geqslant 2. \end{cases}$$

BCZ-преобразование и арифметические свойства дробей Фарея

Усложним задачу: пусть $k_1, k_2 \geqslant 1$ - заданные целые числа. Найдём асимптотику числа $N(k_1, k_2; Q)$ пар соседних дробей $a_1/q_1 < a_2/q_2$, индексы которых равны k_1 и k_2 соответственно.
Удобно рассмотреть их окружение: не 2, а 4 соседние дроби:

$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2} < \frac{a_3}{q_3}.$$

Тогда:

$$k_1 = \left[\frac{Q + q_0}{q_1}\right] = \left[\frac{1 + q_0/Q}{q_1/Q}\right], \quad k_2 = \left[\frac{Q + q_1}{q_2}\right] = \left[\frac{1 + q_1/Q}{q_2/Q}\right].$$

Эти равенства означают:

$$\text{точка } \left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) \in \mathcal{T}(k_1), \quad \text{точка } \left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right) \in \mathcal{T}(k_2).$$

Важно:

$$\left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right) = T\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = T^{-1}\left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right) \in T^{-1}\mathcal{T}(k_2)$$

По сравнению с предыдущей задачей к условию

$$(q_0, q_1) \quad \text{- примитивная точка области} \quad Q\cdot\mathcal{T}(k_1)$$

добавится условие:

$$(q_0, q_1) \quad \text{- примитивная точка области} \quad Q\cdot T^{-1}\mathcal{T}(k_2)$$

Следовательно,

$$(q_0, q_1) \quad \text{- примитивная точка области} \quad Q\cdot\mathcal{T}(k_1,k_2) = Q\cdot\mathcal{T}(k_1)\cap T^{-1}\mathcal{T}(k_2)$$

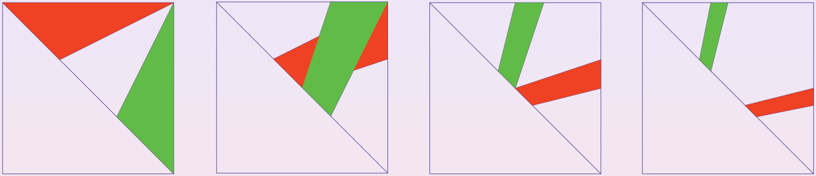
Это условие будет достаточным. Остаётся выразить искомое количество через площадь и найти искомую долю:

$$\nu(k_1,k_2;Q) = \frac{N(k_1,k_2;Q)}{N(Q)-4} \sim 2|\mathcal{T}(k_1,k_2)| = \nu(k_1,k_2)$$

Табличка значений величин $|\mathcal{T}(k_1, k_2)|$:

$k_1 \backslash k_2$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1/30	4/105	1/35	2/105	1/84
2	1/30	1/10	1/35	1/210	0	0
3	4/105	1/35	0	0	0	0
4	1/35	1/210	0	0	0	0
5	2/105	0	0	0	0	0
6	1/84	0	0	0	0	0

BCZ-преобразование и арифметические свойства дробей Фарея



Взаимное расположение областей $\mathcal{T}(k)$ и $T\mathcal{T}(k)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Система неравенств, задающих область $|\mathcal{T}(k_1, k_2)|$:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{k_1+1} < y \leqslant \dfrac{x+1}{k_1} \\ \dfrac{(k_2+1)x+1}{k_1(k_2+1)-1} < y \leqslant \dfrac{k_2 x+1}{k_1 k_2 - 1}, \\ 0 < x, y \leqslant 1, \quad x+y > 1. \end{cases}$$

Дальнейшее обобщение: задан набор $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_r)$; ищется асимптотика доли $\nu(\vec{k}; Q)$ кортежей из r последовательных дробей с заданными значениями индексов: $k_1, \ldots, k_r$.
Для этого рассматриваем $(r+2)$ соседние дроби ряда $\Phi(Q)$ вида

$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \ldots < \frac{a_r}{q_r} < \frac{a_{r+1}}{q_{r+1}},$$

и доказывается, что пара знаменателей (q_0, q_1), порождающая такой кортеж, отвечает примитивной точке области

$$\mathcal{T}(\vec{k}) = \mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r) =$$
$$= \mathcal{T}(k_1) \bigcap T^{-1}(\mathcal{T}(k_2)) \bigcap T^{-2}(\mathcal{T}(k_3)) \bigcap \ldots \bigcap T^{-(r-1)}(\mathcal{T}(k_r)).$$

Ответ:

$$\nu(\vec{k}; Q) \to \nu(\vec{k}) = 2|\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)|.$$

Основной вопрос: если задан набор чисел $k_1, \ldots, k_r$, то как посчитать площадь фигуры $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$?

Единственный известный способ - выписать системы линейных неравенств и решить её. В общем случае она имеет вид:

$$\begin{cases} f_i(x; k_1, \ldots, k_i) < y \leqslant g_i(x; k_1, \ldots, k_i), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \\ 0 < x, y \leqslant 1, \quad x + y > 1. \end{cases}$$

Здесь f_i, g_i - линейные функции, коэффициенты которых зависят от чисел $k_1, \ldots, k_r$ и могут быть выражены в терминах «обобщённых континуантов».

Обобщённые континуанты - многочлены от набора переменных, определяемые рекуррентными соотношениями:

$$\mathbb{K}_0(\cdot) \equiv 1,$$
$$\mathbb{K}_1(X_1) = X_1,$$
$$\mathbb{K}_r(X_1,\ldots,X_r) = X_r \cdot \mathbb{K}_{r-1}(X_1,\ldots,X_{r-1}) - \mathbb{K}_{r-2}(X_1,\ldots,X_{r-2}), \quad r \geqslant 2.$$

В частности,

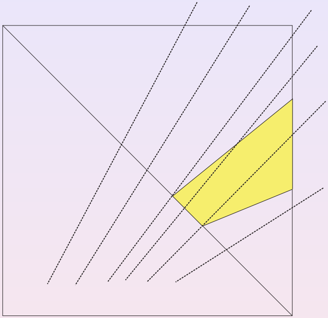
$$\mathbb{K}_2 = X_1X_2 - 1,$$
$$\mathbb{K}_3 = X_1X_2X_3 - X_1 - X_3,$$
$$\mathbb{K}_4 = X_1X_2X_3X_4 - X_1X_2 - X_1X_4 - X_3X_4 + 1.$$

Область $\mathcal{T}(k_1, \ldots, k_r)$ - либо пустое множество, либо выпуклый многоугольник.

При решении задач, подобных рассмотренным выше, нужно уметь строить «генеалогические деревья», отвечающие непустым областям $\mathcal{T}(\vec{k})$.

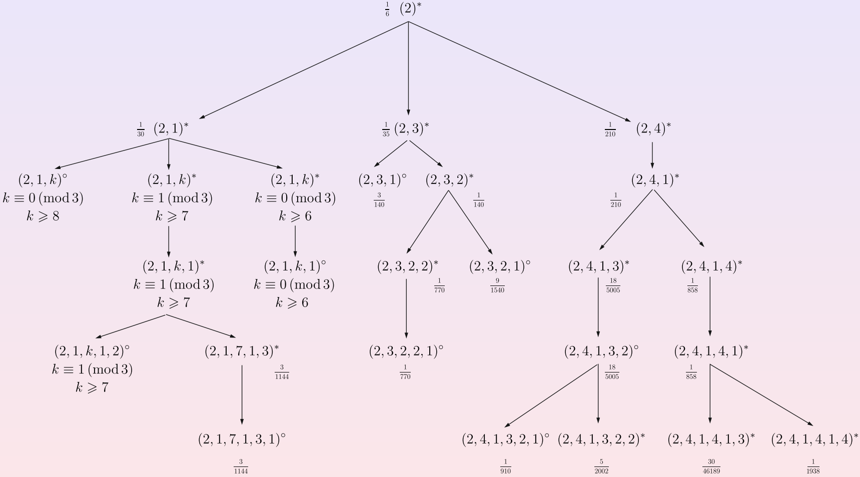
Например: берем набор $\vec{k} = (2)$ и отыскиваем все непустые области вида $\mathcal{T}(2, k)$ среди $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Геометрически это означает следующее: изображаем область $\mathcal{T}(2)$ начинаем проводить всевозможные прямые $f_2(2, k; x)$, $g_2(2, k; x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.



Наборы, отвечающие непустым областям $\mathcal{T}(2, k)$ называем «потомками» набора (2). С ними проделываем то же самое - получаем новое «поколение». И т. д.
В конкретных задачах на наборы $\vec{k}$ накладываются дополнительные условия (например, в виде сравнений по заданному модулю для континуантов), и в таких деревьях приходится производить дополнительный отбор элементов.

BCZ-преобразование и арифметические свойства дробей Фарея



Это - пример дерева, возникающего в следующей задаче: пусть $r \geqslant 1$ - произвольное фиксированное число. Найти долю $\nu(r)$ кортежей из последовательных дробей ряда Фарея $\Phi(Q)$ вида

$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \ldots < \frac{a_r}{q_r} < \frac{a_{r+1}}{q_{r+1}},$$

таких, что знаменатели q_0, q_{r+1} делятся на 3, а знаменатели $q_1, \ldots, q_r$ не кратны тройке.

Пример: в ряду $\Phi(31)$ имеется кусок из 10 подряд идущих дробей, знаменатели которых не кратны 3:

$$\frac{8}{27} < \frac{3}{10} < \frac{7}{23} < \frac{4}{13} < \frac{9}{29} < \frac{5}{16} < \frac{6}{19} < \frac{7}{22} < \frac{8}{25} < \frac{9}{28} < \frac{10}{31} < \frac{1}{3}.$$

Теорема. *Имеют место равенства*

$$\nu(1) = 6 - 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right) = 0.175176694195345\ldots,$$

$$\nu(2) = 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{87}{35} = 0.375034016550147\ldots,$$

$$\nu(3) = 12\ln 3 - \frac{53\,132}{4095} = 0.208500089169941\ldots,$$

$$\nu(4) = \frac{528\,904}{45\,045} - 4\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 3\right) = 0.092033930071231 5\ldots,$$

$$\nu(5) = 2\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right) - \frac{4\,164\,383}{3\,063\,060} = 0.0708242239352303\ldots,$$

$$\nu(6) = \frac{3\,089}{85\,085} = 0.0363048715989892\ldots,$$

$$\nu(7) = \frac{54\,097}{3\,879\,876} = 0.0139429713733119\ldots\ .$$

(выражения для $\nu(r)$ при $r \geqslant 8$ также могут быть выписаны явно, но они имеют более сложный вид).

Вопросы, ответ на которые пока не получен:

1. Как, имея набор $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ и не решая непосредственно системы неравенств, определить, пуста или нет область $\mathcal{T}(\vec{k})$, а в случае её непустоты - её вид (число вершин, их координаты)?

2. Все непустые области, встречавшиеся в каких-либо задачах, были треугольниками, четырёхугольниками и (в очень редких случаях) - пятиугольниками. Каково максимальное число вершин у многоугольника $\mathcal{T}(\vec{k})$?

3. Доказать утверждение, подобное последней теореме, когда вместо делимости на 3 накладывается условие делимости на 5, 7, 11 и пр.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!