Представления колчанов

Семинар # 2

① Докажите, что $\mathrm{Ext}_\Upsilon(V, W)$ отождествляется с коядром отображения

$$\bigoplus_{x\in Q_0} \mathrm{Hom}(V(x), W(x)) \xrightarrow{d} \bigoplus_{a\in Q_1} \mathrm{Hom}(V(ta), W(ha)).$$

$$\underset{\in}{(\phi_x,\ x\in Q_0)} \longmapsto \underset{\in}{(\phi_{ha}\circ V(a) - W(a)\circ\phi_{ta},\ a\in Q_1)}$$

② Пусть Q – ацикличный (для простоты). Докажите, что для всякого проективного представления P и любого V выполнено

$$\mathrm{Ext}_\Upsilon(P, V) = 0.$$

Попробуйте вывести это двумя способами: из определения и при помощи ①.

③ Пусть Γ – конечный граф с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$. Обозначим за $n_{ij} = n_{ji}$ число ребер, соединяющих i и j. Рассмотрим симметрическую билинейную форму на $\mathbb{Z}^n$

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} -n_{ij}, & i\neq j, \\ 2-2n_{ii}, & i=j. \end{cases}$$

Положим $q(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha,\alpha)$.

a) Проверьте, что $q(\alpha) = \sum \alpha_i^2 - \sum\limits_{i\leq j} n_{ij}\alpha_i\alpha_j$.

Опр Скажем, что q положительно определена, если $q(\alpha) > 0\ \ \forall\, \alpha\in\mathbb{Z}^n, \alpha\neq 0$; неотрицательно определена, если $q(\alpha)\geq 0\ \ \forall\, \alpha\in\mathbb{Z}^n$.

Опр Радикал q – это $\mathrm{rad}(q) = \{\alpha\in\mathbb{Z}^n \mid (\alpha, -) = 0\}$.

б) Покажите, что если Γ — связный граф, $0 \neq \beta \geq 0$ и $\beta \in \mathrm{rad}(q)$, то $\beta_i > 0$ $\forall i$, форма q неотрицательно определена и $\mathrm{rad}(q) = \mathbb{Q}\beta \cap \mathbb{Z}^n$.

<u>План:</u> I Проверьте, что $\beta_i > 0$ $\forall i = 1, \dots, n$.

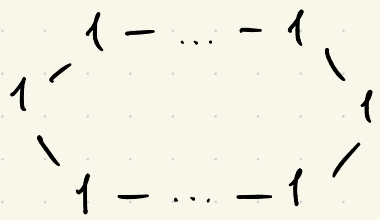
II Проверьте, что

$$q(\alpha) = \sum_{i<j} n_{ij} \frac{\beta_i \beta_j}{2} \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)^2.$$

④ Евклидовы графы (всегда m+1 вершина)

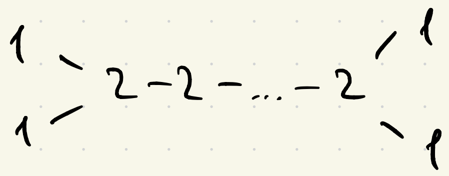
$\tilde{A}_m$

$m \geq 0$

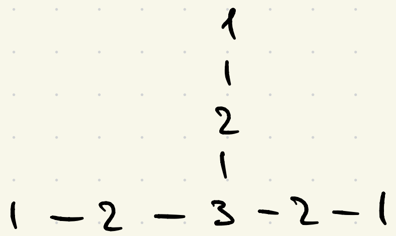


$\tilde{D}_m$

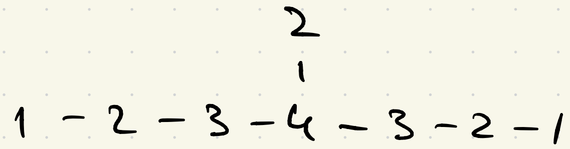
$m \geq 4$



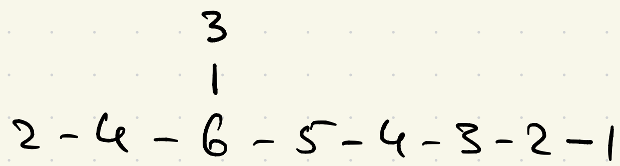
$\tilde{E}_6$



$\tilde{E}_7$



$\tilde{E}_8$



В вершинах написаны значения δ_i.

Докажите, что $q(\delta) = 0$.

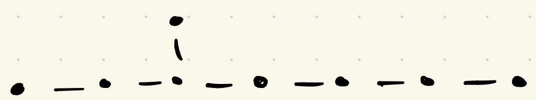
⑤ Графы Дынкина (всегда n вершин)

A_n 

D_n 

E_6 

E_7 

E_8 

Покажите, что для графов Дынкина форма q положительно определена.

<u>План</u> Граф Дынкина вкладывается в соответствующий граф Евклида.

⑥ Докажите, что если Γ - связный граф, который не является ни графом Дынкина, ни графом Евклида, то найдется $\alpha \geq 0$, т.ч. $q(\alpha) < 0$ и $(\alpha, \varepsilon_i) \leq 0$ $\forall i = 1, \dots, n$.

<u>План</u> Найдите Евклидов подграф $\Gamma' \subset \Gamma$. Если множества вершин Γ и Γ' совпадают, рассмотрите $\alpha = \delta$. Если $i \in \Gamma \setminus \Gamma'$, рассмотрите $\alpha = 2\delta + \varepsilon_i$.