

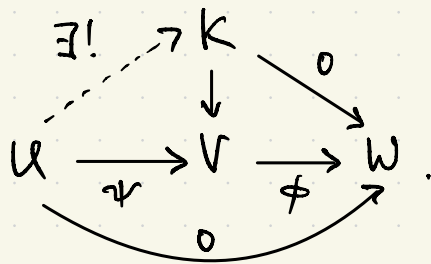
① Ядро и коядро

Опр Пусть $f: V \rightarrow W$ - морфизм представлений кольца Q .

Ядро f - это представление K и морфизм $\iota: K \rightarrow V$,

такие что $f \circ \iota = 0$, причем всякий морфизм $u \xrightarrow{\varphi} V$,

т.е. $f \circ \varphi = 0$ единственным образом проускается через K :



Явным образом покажите, что в категории $Q\text{-Rep}$ существуют ядра всех морфизмов.

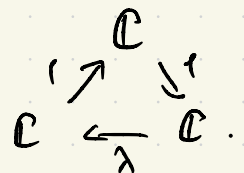
② Простые модули / представления

a) Пусть Q - циклический колчан. Найдите все простые представления Q .

b) Классифицируйте все простые представления колчана



Подсказка: рассмотрите представление



c) Докажите, что если Q содержит цикл, то имеется бесконечно много неизоморфных представлений Q .

③ Проективные покрывающие

Def Проективная покрывающая представление / модуль

V - это экиморфизм $P \xrightarrow{\pi} V$, т.е. $\forall W \subset P$ если $\ker \pi + W = P$, то $W = P$.

а) Покажите, что для экиморфизма $P \xrightarrow{\pi} V$, где P - проективный, следующие условия эквивалентны:

1) $P \xrightarrow{\pi} V$ - проективная покрывающая

2) Если $\alpha \in \text{End}(P)$ и $\pi \alpha = \pi$, то α - изоморфизм.

б) Покажите, что проективные покрывающие (если существуют) единственны с точностью до изоморфизма.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\sim} & P' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & V & \end{array}$$

в) Пусть $P \xrightarrow{\pi} S$ - проективная покрывающая простого модуля. Покажите, что в P существует единственный максимальный подмодуль, а P - неразложимый.

④ Пусть V - представление кольца Q . Постройте короткую точную последовательность вида

$$0 \rightarrow \bigoplus_{a \in Q} V(t(a)) \otimes P_{t(a)} \xrightarrow{?} \bigoplus_{s \in Q_0} V(s) \otimes_k P_s \xrightarrow{?} V \rightarrow 0$$

векторное пространство
 проективный модуль
 $\dim V(s)$ копий P_s