Функциональные уравнения, связанные с эллиптическими функциями

Рассмотрим функциональное уравнение

$$f(x+y)g(x-y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)b_j(y) \tag{1}$$

относительно неизвестных (целых) функций $f, g, \alpha_j, \beta_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Его нетрудно решить при $n = 1$. Согласно классической формуле сложения

$$\sigma(x+y)\sigma(x-y) = \sigma^2(x)\sigma^2(y)(\wp(y) - \wp(x)),$$

где σ — сигма-функция Вейерштрасса, а $\wp = -(\ln\sigma)''$. Поэтому пара $(f, g) = (\sigma, \sigma)$ удовлетворяет уравнению (1) (вместе с некоторыми a_j, b_j) при $n = 2$. R. Rochberg и L.A. Rubel (1992) доказали, что с точностью до некоторых простых преобразований других неэлементарных решений уравнение (1) при $n = 2$ не имеет. В настоящее время уравнение (1) решено только при $n = 1, 2, 3$, а в случае 1-периодических f, g — при $n = 4$. В докладе мы рассмотрим эти результаты, затронем функциональное уравнение вида

$$f_1(x_1+z)\ldots f_{s-1}(x_{s-1}+z)f_s(x_1+\ldots+x_{s-1}-z) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x_1,\ldots,x_{s-1})\psi_j(z)$$

а также некоторый дискретный аналог уравнения (1).