Конечномерные алгебры

Фиксируем поле k и конечномерную k-алгебру R. k-подпространство $I \subset R$ называется *левым* (соотв. *правым*, соотв. *двусторонним*) *идеалом* в R, если для всех $a, b \in R$ выполнено

$$aI \subset I \quad (\text{соотв. } Ia \subset I, \text{ соотв. } aIb \subset I)$$

Если $I, K \subset R$ левые идеалы, то

$$I + K := \{i + k \mid i \in I, k \in K\}$$

и

$$IK := \{\text{конечные суммы } \sum_s i_s k_s \mid i_s \in I, k_s \in K\}$$

тоже левые идеалы (аналогично для правых и двусторонних идеалов).

Идеал $I \subset R$ называется *нильпотентным*, если $I^n = 0$ для некоторого $n > 0$.

Радикал.

1. Докажите, что сумма $I + K$ левых нильпотентных идеалов - также нильпотентный идеал.

Определение. Сумма всех нильпотентных левых идеалов обозначается через $J = J(R) \subset R$ и называется *радикалом* алгебры R. Это максимальный нильпотентный левый идеал в R.

2. Докажите, что $J(R)$ - правый идеал. Т.е. $J(R)$ - это также максимальный нильпотентный *правый* идеал в R.

Полупростые алгебры.

Определение. Алгебра R *полупроста*, если $J(R) = 0$. Алгебра R *проста*, если в ней нет нетривиальных двусторонних идеалов.

3. Докажите, что факторалгебра $R/J(R)$ полупроста.

Определение. Алгебра R называется *телом* или *алгеброй с делением*, если множество ненулевых элементов в R - это мультипликативная группа.

4. Докажите, что если A простая алгебра (например, A - тело), то матричная алгебра $R = M_n(A)$ также проста.

Для простых и полупростых алгебр имеется следующая важная классификационная теорема. (Мы не будем ее доказывать).

Теорема 0.1. *(1) Любая простая алгебра изоморфна матричной алгебре $M_n(D)$ для некоторого $n > 0$ и некоторого тела D.*

(2) Любая полупростая алгебра изоморфна конечному произведению матричных алгебр $M_{n_i}(D_i)$ для некоторых $n_i > 0$ и некоторых тел D_i.

В частности, полупростая алгебра изоморфна произведению простых.

Категорная характеризация полупростых алгебр.

Мы будем рассматривать левые конечномерные R-модули. Категорию таких модулей обозначим $R - mod$. Модуль $M \in R - mod$ называется *простым*, если в M нет нетривиальных подмодулей. Он называется *полупростым*, если для каждого подмодуля $N \subset M$ существует подмодуль $N' \subset M$, т.ч. $M = N \oplus N'$.

5. Докажите, что для модуля M следующие условия эквивалентны:
(а) M полупрост.
(б) $M = \oplus_i M_i$, где подмодули $M_i \subset M$ просты.
(в) $M = \sum M_i$, где подмодули $M_i \subset M$ просты.

Теорема 0.2. *Алгебра R полупроста тогда и только тогда, когда каждый R-модуль полупрост.*

Докажем Теорему 0.2 в серии задач.

6. Пусть каждый R-модуль полупрост. Докажите, что алгебра R полупроста. Подсказка: пусть $J(R) \neq 0$ и $J(R)^n \neq 0$, $J(R)^{n+1} = 0$. Рассмотрите R как левый R-модуль с ненулевым подмодулем $J(R)^n$. По предположению, $R = J(R)^n \oplus T$ для некоторого левого идеала $T \subset R$. Тогда единица 1 алгебры R раскладывается в сумму $1 = j + t$, $j \in J(R)^n, t \in T$. Покажите, что

$$1 = 1^2 = (j+t)^2 = t$$

т.е. $1 \in T$, и поэтому $R = T$ - противоречие.

Обратная импликация в Теореме 0.2 доказывается сложнее. Тут ключевым моментом является следующая лемма.

Лемма 0.3. *Пусть левый идеал I в алгебре R не нильпотентный. Тогда существует $0 \neq e \in I$, т.ч. $e^2 = e$.*

Доказательство леммы: Уменьшая идеал I, если нужно, можно предположить, что $I^2 = I \neq 0$, и что I минимальный не нильпотентный левый идеал. Возьмем минимальный ненулевой левый идеал $K \subset I$, т.ч. $IK \neq 0$. Если $x \in K$ такой, что $Ix \neq 0$, то $I \cdot Ix = Ix \neq 0$, и, значит, $Ix = K$, т.е. существует $a \in I$ со свойством

$$x = ax = a^2x = ...$$

В частности, получаем $a \in I$, т.ч. $a^n \neq 0$ при всех $n > 0$, и $(a^2 - a)x = 0$. Положим

$$n_1 := a^2 - a \in N := \{u \in I \mid ux = 0\}$$

Заметим, что N ненулевой левый идеал, строго содержащийся в I, и след. N нильпотентен. Возьмем

$$a_1 := a + n_1 - 2an_1 \in I$$

Элементы a_1, a, n_1 коммутируют, n_1 нильпотентен, а a - нет. Значит, a_1 не нильпотентен. Мы имеем

$$a_1^2 - a_1 = n_1(4n_1^2 - 3n_1)$$

Поэтому $n_2 := a_1^2 - a_1$ нильпотентен, делится на n_1 и коммутирует с a_1. Положим

$$a_2 := a_1 + n_2 - 2a_1n_2$$

и так далее. По индукции получаем последовательность не нильпотентных элементов $a, a_1, a_2, ... \in I$ таких, что $a_i^2 - a_i$ нильпотентен и делится на $n_1^{2^i}$. Значит при некотором i, $a_i^2 = a_i$. Лемма доказана.

Мы готовы доказывать обратную импликацию в Теореме 0.2. Элемент $e \in R$ называется *идемпотентом*, если $e^2 = e$. Заметим, что у любого идемпотента e существует *дополнительный* идемпотент $e' := 1 - e$.

7. Допустим, что алгебра R полупроста. Докажите, что левый R-модуль R полупрост. Подсказка: использовать Лемму 0.3.

8. Допустим, что алгебра R полупроста. Докажите, что любой простой R-модуль M изоморфен минимальному левому идеалу в R.

9. Допустим, что алгебра R полупроста. Докажите, что любой R-модуль полупрост. (Теорема 0.2 доказана).

Важные дополнения.

Для каждого (левого) R-модуля M можно рассмотреть его кольцо эндоморфизмов

$$End_R(M) := \{f \in End_k(M) \mid f(rm) = rf(m), \text{ для всех } r \in R,\ m \in M\}$$

10. Докажите, что $End(M)$ - это тоже конечномерная k-алгебра.

11. Докажите, что $End(R) \simeq R^{op}$, где алгебра R^{op} совпадает с R, как векторное пространство, но имеет противоположное умножение $r_1 \circ r_2 := r_2 r_1$.

12. Докажите Лемму Шура: если модуль M прост, то $End(M)$ - тело.

13. Докажите, что если модуль M прост, то радикал $J(R)$ лежит в ядре отображения $R \to End_k(M)$, т.е. радикал алгебры действует нулём на любом простом модуле.

14. (Линейная алгебра над телом). Пусть D тело. Докажите, что каждый (ненулевой) простой D-модуль изоморфен D. А также, каждый простой $M_n(D)$-модуль изоморфен D^n.

15. Допустим, что поле k алгебраически замкнуто, и D (конечномерная) k-алгебра с делением. Докажите, что $D = k$.

Расширение скаляров. Пусть дан гомоморфизм алгебр $\phi : R \to Q$. Тогда Q можно рассматривать как *правый* R-модуль:

$$q \circ r := q\phi(r)$$

Если $M \in R - mod$, рассмотрим тензорное произведение $Q \otimes_R M$, определенное как фактор абелевой группы $\mathbf{Z}[Q \times M]$, свободно порожденной множеством $Q \times M$, по соотношениям

$$(q_1 + q_2, m) = (q_1, m) + (q_2, m)$$
$$(q, m_1 + m_2) = (q, m_1) + (q, m_2)$$
$$(q \circ r, m) = (q, rm)$$

Обозначим через $q \otimes m$ образ (q, m) в $Q \otimes_R M$. Тогда элементы в $Q \otimes_R M$ - это конечные суммы $\sum q_i \otimes m_i$.

16. Докажите, что $Q \otimes_R M$ - это (левый) Q-модуль:

$$q(\sum q_i \otimes m_i) := \sum qq_i \otimes m_i$$

17. (Сопряженные функторы). Пусть дан гомоморфизм алгебр $\phi : R \to Q$. Тогда любой $N \in Q - mod$ можно рассматривать как R-модуль:

$$rn := \phi(r)n$$

Докажите, что для любых $N \in Q - mod$, $M \in R - mod$ имеется изоморфизм k-векторных пространств

$$Hom_Q(Q \otimes_R M, N) \simeq Hom_R(M, N)$$

Гомологическая алгебра

Фиксируем поле k и конечномерную k-алгебру A. Будем рассматривать конечномерные (левые) A-модули и морфизмы между ними, т.е. рассмотрим *категорию* $A - mod$ левых конечномерных A-модулей.

1. Докажите, что для любых $M, N \in A - mod$ множество морфизмов $Hom_A(M, N)$ - это конечномерное векторное пространство. В частности, $Hom_A(M, M)$ - это снова конечномерная k-алгебра. Проверьте, что $Hom_A(A, A)$ состоит из правых умножений на элементы A, т.е. алгебры $Hom_A(A, A)$ и A^{opp} изоморфны.

A-модуль P называется проективным, если существует модуль Q и изоморфизм $P \oplus Q \simeq A^{\oplus n}$, т.е. P - это прямое слагаемое свободного модуля.

2. Докажите, что каждый A-модуль полупрост (т.е. изоморфен прямой сумме простых модулей), тогда и только тогда, когда все A-модули проективны.

Диаграмма A-модулей

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

называется *проективной резольвентой* модуля M, если модули $P_0, P_1, \ldots$ проективны и ядро следующего морфизма совпадает с образом предыдущего. Очевидно, что у любого модуля существует проективная резольвента. Например, если модуль M проективен, то у него есть проективная резольвента длины ноль: $0 \to M \overset{id}{\to} M \to 0$. Для модуля M его *проективная размерность*, $pd(M)$ - это наименьшее натуральное n, т.ч. существует проективная резольвента

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

Если конечной резольвенты нет, то полагаем $pd(M) = \infty$. *Глобальная размерность* $= gldim(A)$ алгебры A - это супремум $pd(M)$ по всем модулям M.

3. Пусть $A = k[x]/x^2$ - алгебра дуальных чисел. Докажите, что $gldim(A) = \infty$.

4. Рассмотрим алгебру верхнетреугольных матриц

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}, \quad a, b, c \in k$$

Докажите, что $gldim(A) = 1$.

Для модулей $M, N \in A - mod$ пространства $Ext^i_A(M,N)$ определяются следующим образом. Выберем проективную резольвенту

$$... \xrightarrow{d_1} P_1 \xrightarrow{d_0} P_0 \to M \to 0$$

и рассмотрим индуцированную диаграмму k-векторных пространств

$$0 \to Hom_A(P_0, N) \xrightarrow{d_0^*} Hom_A(P_1, N) \xrightarrow{d_1^*} \cdots \tag{1}$$

5. Докажите, что диаграмма (1) это комплекс k-векторных пространств, т.е. отображения d_i^* k-линейны и $d_i^* \cdot d_{i-1}^* = 0$.

Для каждого $i \geq 0$ определим векторное пространство

$$Ext^i_A(M,N) := ker(d_i^*)/im(d_{i-1}^*)$$

(!) Можно показать что эти пространства определены корректно, т.е. не зависят от выбора проективной резольвенты.

6. Докажите, что $Ext^0_A(M,N) = Hom_A(M,N)$.

7. Пусть $A = k[x]/(x^2)$ и $M = N = A/(x) = k$. Вычислите пространства $Ext^i_A(k,k)$ для всех $i \geq 0$.

8. Для алгебры верхнетреугольных матриц из задачи 4 найдите два простых модуля M, N, т.ч. $Hom(M,N) = 0$, $Ext^1(M,N) \neq 0$.

Представления некоторых конечных групп

1. Пусть $G = C_n$ циклическая группа порядка n. Опишите в явном виде изоморфизм $\mathbf{C}$-алгебр

$$\mathbf{C}G \simeq \underbrace{\mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}}_{n \text{ сомножителей}}$$

2. Пусть p простое число. Докажите, что групповая алгебра $\mathbf{Q}C_p$ изоморфна произведению алгебр

$$\mathbf{Q}C_p \simeq \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}(\zeta_p)$$

где $\zeta_p \in \mathbf{C}^*$ - корень p-ой степени из 1. ($\mathbf{Q}(\zeta_n)$ - это циклотомическое поле).

3. Пусть (V, ρ) - представление конечной группы G. Докажите, что на V имеется эрмитово скалярное произведение (т.е. эрмитова положительно определенная форма) (v, w), которое G-инвариантно, т.е.

$$(v, w) = (\rho_g v, \rho_g w), \quad \forall g \in G,\ v, w \in V$$

4. Постройте изоморфизмы групп

$$Gl_2(\mathbf{F}_2) \simeq S_3$$
$$PGl_2(\mathbf{F}_3) \simeq S_4$$
$$PGl_2(\mathbf{F}_5) \simeq S_5$$

5. Определите сюръективный гомоморфизм групп

$$\pi : S_4 \to S_3$$

Диэдральная группа. Диэдральная группа D_n - это группа симметрий правильного n-угольника. Она имеет порядок $2n$, порождена элементами r, s с соотношениями

$$r^n = 1, \quad s^2 = 1, \quad rs = sr^{-1}$$

6. Найдите центры групп D_5 и D_6.

7. Опишите классы сопряженности в D_5 и в D_6.

8. Опишите все неприводимые представления группы D_5.

9. Опишите все неприводимые представления группы D_6.

Индуцирование представлений и закон взаимности Фробениуса.

Пусть G - конечная группа, и $H \subset G$ - подгруппа. Тогда вложение групповых алгебр $\mathbf{C}H \subset \mathbf{C}G$ дает функтор расширения скаляров

$$\mathbf{C}H - mod \longrightarrow \mathbf{C}G - mod, \quad W \mapsto \mathbf{C}G \otimes_{\mathbf{C}H} W$$

(см. тему "Расширение скаляров"в разделе "Конечномерные алгебры".) Обозначим $Ind_H^G W := \mathbf{C}G \otimes_{\mathbf{C}H} W$. Это представление группы G, *индуцированное* представлением W.

С другой стороны, любое представление V группы G можно рассматривать как представление группы H, которое мы обозначим $Res_G^H V$.

10. Докажите что имеется изоморфизм векторных пространств

$$Hom_G(Ind_H^G W, V) \simeq Hom_H(W, Res_G^H V)$$

(Закон взаимности Фробениуса). В частности, если V и W неприводимы, то кратность V в $Ind_H^G W$ равна кратности W в $Res_G^H V$.

Характеры некоторых представлений.

11. Пусть $V = V_1$, V_2 - представления G. Докажите следующие равенства функций классов на G:

$$\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \cdot \chi_{V_2}$$

$$\chi_{Sym^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2))$$

$$\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$$

Представления группы S_d

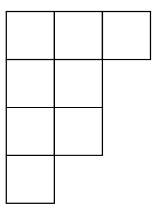
1. Разбиение числа d - это набор натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$, т.ч. $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_k \geq 1$ and $\lambda_1 + ... + \lambda_k = d$. Докажите, что классы сопряженности в симметрической группе S_d естественным образом нумеруются разбиениями числа d.

2. Пусть $p(d)$ - число разбиений d. Докажите тождество

$$\sum_{d=0}^{\infty} p(d)t^d = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^n} = (1+t+t^2+\cdots)(1+t^2+t^4+\cdots)\cdots$$

(Мы полагаем $p(0) = 1$).

0.4. **Диаграммы и таблицы Юнга.** Разбиению $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ сопоставим соответствующую *диаграмму Юнга*, в которой имеется k строк, в i-той строке - λ_i клеток. Например, для разбиения $(3, 2, 2, 1)$ получим диаграмму



По диаграмме Юнга можно построить *таблицу Юнга*, расставив в клетках числа $\{1, ..., d\}$ в произвольном порядке. Например так:

4	1	7
5	8	
3	6	
2		

Для данной таблицы Юнга T рассмотрим подгруппу $P = P_T \subset S_d$ состоящую из перестановок, сохраняющих строки T. Аналогично, подгруппа $Q = Q_T \subset S_d$ состоит из перестановок, сохраняющих столбцы T. Определим два элемента в групповой алгебре $\mathbf{C}[S_d]$:

$$a_T := \sum_{g \in P} e_g, \quad b_T := \sum_{g \in Q} sgn(g) e_g$$

и положим

$$c_T := a_T b_T = \sum_{p \in P, q \in Q} sgn(q) pq \in \mathbf{C}[S_d]$$

- это *симметризатор Юнга.* Мы будем рассматривать левые идеалы $V_T := \mathbf{C}[S_d]c_T$, как левые $\mathbf{C}[S_d]$-модули, т.е. как представления группы S_d.

Пусть T и T' - две таблицы, соответствующие одной и той же диаграмме, и пусть $g \in S_d$ - перестановка такая, что $gT = T'$. Т.е. T' получена из T заменой числа i на $g(i)$.

3. Докажите, что $a_{T'} = g a_T g^{-1}$, $b_{T'} = g b_T g^{-1}$, $c_{T'} = g c_T g^{-1}$, и представления V_T и $V_{T'}$ изоморфны.

0.5. **Основная теорема.**

Теорема 0.6. *Для каждой диаграммы T представление V_T неприводимо. Если диаграммы T и T' построены по различным таблицам, то представления V_T и $V_{T'}$ не изоморфны. Таким образом, различные V_T исчерпывают все неприводимые представления S_d.*

Доказательство основной теоремы будет получено в серии задач.

4. Докажите, что для любых $p \in P_T$, $q \in Q_T$ имеются равенства: $p \cdot a_T = a_T \cdot p = a_T$, $sgn(q)q \cdot b_T = b_T \cdot sgn(q)q = b_T$ и $p \cdot c_T = c_T \cdot sgn(q)q = c_T$.

5. Пусть $g \in S_d$, $g \notin Q_T P_T$. Тогда существует транспозиция $t \in S_d$, т.ч. $t \in P_T$, $g^{-1}tg \in Q_T$. (Подсказка: докажите, что имеются два индекса i, j находящиеся в одной строке таблицы T и в одном столбце таблицы gT; тогда $g = (ij)$.)

6. Пусть элемент $e = \sum n_g e_g \in \mathbf{C}[S_d]$ таков, что для всех $p \in P_T$, $q \in Q_T$ выполнено равенство

$$p \cdot e \cdot sgn(q)q = e$$

Докажите, что тогда $e = \alpha c_T$ для некоторого $\alpha \in \mathbf{C}$. (Подсказка: покажите, что (1) для всех $p \in P_T$, $q \in Q_T$ выполнено равенство коэффициентов $n_{pq} = sgn(q)n_1$; (2) если $g \notin P_T Q_T$, то $n_g = -n_g = 0$ - воспользуйтесь предыдущей задачей.)

7. Выведите из предыдущей задачи, что для всех $x \in \mathbf{C}[S_d]$,

$$c_T \cdot x \cdot c_T = \alpha c_T, \quad \text{для некоторого } \alpha \in \mathbf{C}$$

В частности, $c_T \cdot c_T = n c_T$, $n \in \mathbf{C}$.

Следствие 0.7. *(1) Представление V_T неприводимо.*
(2) $c_T V_T \neq 0$.

Доказательство. (Набросок) (1) Из задачи 7 мы знаем, что $c_T V_T \subset \mathbf{C} c_T$. Пусть $W \subset V_T$ - подпредставление. Тогда $c_T W = \mathbf{C} c_T$, либо $c_T W = 0$. В первом случае получаем $V_T = \mathbf{C}[S_d] c_T \subset W$, т.е. $V_T = W$. Во втором случае $W \cdot W \subset \mathbf{C}[S_d] \cdot c_T W = 0$. Тогда рассмотрим проекцию $\mathbf{C}[S_d] \to W$ (т.е. отображение левых $\mathbf{C}[S_d]$-модулей, задаваемое правым умножением на элемент $r \in \mathbf{C}[S_d]$). Имеем $r = r^2 \in W \cdot W = 0$, т.е. $W = 0$. (2) Следует из доказательства (1). □

8. Восстановите детали предыдущего доказательства.

На множестве разбиений введем лексикографический порядок: считаем, что $\lambda > \mu$, если первая ненулевая разность $\lambda_i - \mu_i$ положительна.

9. Пусть таблицы T и T' построены по разбиениям $\lambda > \mu$. Докажите, что для всех $x \in \mathbf{C}[S_d]$

$$b_{T'} \cdot x \cdot a_T = 0$$

В частности $c_{T'} \cdot \mathbf{C}[S_d] \cdot c_T = c_{T'} \cdot c_T = 0$. (Подсказка: Пусть $x = g \in S_d$. Тогда, заменяя T на gT, сводим задачу к равенству $b_{T'} \cdot a_T = 0$. Теперь заметим, что существует транспозиция $t \in P_T, t \in Q_{T'}$, и, значит, $b_{T'} \cdot a_T = b_{T'} \cdot t \cdot t \cdot a_T = -b_{T'} \cdot a_T = 0$.)

10. Пусть T и T' - как в задаче 9. Покажите, что представления V_T и $V_{T'}$ не изоморфны. (Подсказка: сравните действие $c_{T'}$ на $V_{T'}$ и на V_T.)

11. Пусть T и T' - таблицы соответствеющие разным разбиениям. Покажите, что $c_{T'} \cdot c_T = 0$ (это обобщение задачи 9.) (Подсказка: Пусть $\lambda < \mu$. Рассмотрим антиинволюцию $\hat{}: \mathbf{C}[S_d] \to \mathbf{C}[S_d]$, индуцированную отображением $g \mapsto g^{-1}$, $g \in S_d$. Заметим, что

$$\hat{c}_T = \widehat{a_T \cdot b_T} = \hat{b}_T \cdot \hat{a}_T = b_T \cdot a_T,$$

что сводит нас к задаче 9.)

12. Докажите, что для всех T имеет место формула

$$c_T \cdot c_T = \frac{d!}{\dim V_T} c_T$$

(Подсказка: Рассмотрите оператор правого умножения на c_T на пространстве $\mathbf{C}[S_d]$ и вычислите его след двумя разными способами.)