Введение в бирациональную геометрию

Математическая школа по алгебре и теории чисел в Вороново

Июнь 2023 г.

3 июля 2023 г.

Плоские кривые

(1) Докажите теорему Безу для плоских кривых $X, Y \subset \mathbb{P}^2$:
$$0 < \#(X \cap Y) \leq \deg(X) \cdot \deg(Y)$$
если X и Y не имеют общих компонент.

(2) Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ – неособая плоская кривая, заданная уравнением $f = 0$. Докажите, что ее точки перегиба находятся из системы уравнений
$$\begin{cases} f = 0, \\ h = 0, \end{cases}$$
где $h = h_f(x, y, z)$ – гессиан (характеристика основного поля отлична от 2 и не делит $\deg(X)$).

(3) Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ – неособая плоская кубическая кривая. Докажите, что она имеет по крайней мере одну точку перегиба. Выведите отсюда, что в некоторой системе координат уравнение X может быть записано в виде
$$zy^2 = x^3 + axz^2 + bz^3,$$
где многочлен $x^3 + ax + b$ не имеет кратных корней. Характеристика основного поля $\Bbbk$ здесь считается отличной от 2 и 3. *Указание.* Сначала выберите систему координат так, что точка перегиба имеет вид $(0 : 1 : 0)$, а уравнение касательной в этой точке – $\{z = 0\}$.

(4) Воспользуетесь результатом предыдущей задачи и докажите, что неособая плоская кубическая кривая имеет ровно девять точек перегиба (в частности, это число конечно). Характеристика основного поля $\Bbbk$ опять отлична от 2 и 3. Докажите, что конфигурация этих точек образует конечную аффинную геометрию.

(5) Рассмотрим плоские кривые $X, Y \subset \mathbb{P}^2$. Пусть точка $P \in X \cap Y$ является особой для одной из них. Докажите, что P дает вклад ≥ 2 в формулу теоремы Безу $\#(X \cap Y) = \deg(X) \cdot \deg(Y)$.

(6) Докажите, что плоская неприводимая кривая $X \subset \mathbb{P}^2$ степени 3 имеет не более одной особой точки. Если X особа, то она рациональна.

(7) Докажите, что плоская неприводимая кривая $X \subset \mathbb{P}^2$ степени 4 имеет не более трех особых точек. Если X имеет ровно три особые точки, то она рациональна.

(8) Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – неособая кривая, заданная двумя квадратичными уравнениями $q_1 = q_2 = 0$ и пусть $\psi : X \to \mathbb{P}^2$ – проекция из точки $P \in X$. Докажите, что образ $\psi(X)$ – неособая кубическая кривая. Как получить ее уравнение? Наоборот, пусть $Y \subset \mathbb{P}^2$ – неособая кубическая кривая. Докажите, что она есть образ при проекции из точки пересечения двух квадрик.

Рациональность и теория полей

(9) Докажите, что детерминантальное многообразие

$$X_{n,m} := \left\{ \det \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,m} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,m} \\ \cdots & & & \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,m} \end{pmatrix} = 0 \right\} \subset \mathrm{Mat}_{n\times n}(\Bbbk) = \mathbb{A}^{n^2}$$

рационально.

(10⋆) Докажите, что детерминантальное многообразие

$$X_{n,m,r} := \left\{ \mathrm{rk} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,m} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,m} \\ \cdots & & & \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,m} \end{pmatrix} \le r \right\} \subset \mathrm{Mat}_{n\times m}(\Bbbk) = \mathbb{A}^{nm}$$

рационально.

(11) Пусть V – конечномерное векторное пространство и пусть $G \subset GL(V)$ – конечная абелева группа. Докажите, что поле инвариантов $\Bbbk(V)^G$ рационально.

(12) Пусть $V = \Bbbk^2$ – двумерное векторное пространство и пусть $\mathrm{D}_n \hookrightarrow GL(V)$ – точное представление диэдральной группы. Вычислите поле инвариантов $\Bbbk(V)^{\mathrm{D}_n}$. Докажите, что оно рационально.

(13) Пусть $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ – гиперповерхность степени 3, не являющаяся конусом. Предположим, что X особа. Докажите, что X рациональна.

(14) Пусть $X \subset \mathbb{P}^{n+2}$ – многообразие степени 4, являющееся пересечением двух квадрик. Предположим, что X не является конусом. Докажите, что X рационально.

(15) Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ – неособая поверхность степени 3, содержащая пару непересекающихся прямых. Докажите, что X рациональна. *Замечание.* Над алгебраически замкнутым полем любая поверхность степени 3 содержит пару непересекающихся прямых.

(16) Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^5$ – неособая гиперповерхность степени 3, содержащая пару непересекающихся плоскостей. Докажите, что X рациональна. Докажите, что такие гиперповерхности существуют. Докажите, что общая кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^5$ не содержит плоскостей.

(17⋆) Пусть G – конечная группа и пусть V – ее точное конечномерное представление. *Существенной размерностью* $\mathrm{ed}(G, V)$ называется минимальная размерность многообразия X такого, что имеется точное действие G на X и эквивариантное рациональное отображение $V \dashrightarrow X$. Известно, что существенная размерность $\mathrm{ed}(G, V)$ не зависит от выбора точного представления V (зависит только от группы G). Докажите, что группы существенной размерности 1 – это в точности циклические группы и диэдральные группы D_{2n}.

Раздутия. Поверхности $\mathbb{F}_n$

(18) Докажите, что замыкание графика проекции из точки $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ является раздутием точки на $\mathbb{P}^2$.

(19) Рассмотрим неприводимую поверхность $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(n, 1)$. Докажите, что она рациональна, но не изоморфна $\mathbb{P}^2$.

(20) Рассмотрим неприводимую поверхность $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(1, 1)$. Докажите, что проекция $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ является раздутием точки.

(21) Рассмотрим общую поверхность $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(1, n)$. Докажите, что проекция $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ является раздутием n^2 точек.

(22) Докажите, что поверхность $\mathbb{F}_1$ может быть задана в $\mathbb{P}^4$ тремя уравнениями $x_0x_1 = x_2^2$, $x_0x_4 = x_2x_3$, $x_1x_3 = x_2x_4$ и не может быть задана меньшим количеством уравнений.

(23) Докажите, что неособая поверхность $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, являющаяся пересечением двух гиперповерхностей бистепени $(1, 1)$, является раздутием трех точек на $\mathbb{P}^2$.

(24) Докажите, что замыкание графика квадратичной инволюции Кремоны

$$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \qquad (x : y : z) \longmapsto (yz : xz : xy)$$

является раздутием трех точек на $\mathbb{P}^2$.

(25) Докажите, что неособая поверхность $X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ тристепени $(1, 1, 1)$, является раздутием двух точек на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

(26⋆) Пусть $Q \subset \mathbb{P}^3$ – квадратичный конус, заданный уравнением $x_1x_2 = x_3^2$ и пусть $\tilde{Q} \to Q$ – раздутие его вершины. Докажите, что $\tilde{Q} \simeq \mathbb{F}_2$.

(27) Принимая на веру теорему о строении рациональных поверхностей, докажите, что каждая рациональная поверхность содержит открытое подмножество изоморфное аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$.

(28) Пусть $Q \subset \mathbb{P}^3$ – неособая квадрика и пусть $\pi : Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ проекция из точки $P \in Q$. Пусть $\tilde{Q} \subset Q \times \mathbb{P}^2$ – замыкание графика этой проекции. Докажите, что проекция $\tilde{Q} \to Q$ является раздутием точки, а проекция $\tilde{Q} \to \mathbb{P}^2$ является раздутием двух точек.

(29) Докажите, что бирациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ из задачи 15 является композицией раздутий пяти точек. Воспользуйтесь этим и вычислите топологическую эйлерову характеристику кубической поверхности над $\mathbb{C}$.

Дифференциальные формы

(30) Вычислите $\Omega^m[\mathbb{P}^n]$.

(31) Вычислите размерность $\Omega^1[X]$ для неособой кубической кривой $X \subset \mathbb{P}^2$.

(32) Вычислите размерность $\Omega^1[X]$ для неособой кривой $X \subset \mathbb{P}^2$ степени d.

(33) Вычислите размерность $\Omega^n[X]$ для неособой гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ степени d.

(34) Докажите, что конус над неособой плоской кривой степени ≥ 3 нерационален.

(35) Докажите, что над полем характеристики $p > 0$ поверхность

$$\{x_0x_1^p + x_1x_2^p + x_2x_3^p + x_3x_0^p = 0\} \subset \mathbb{P}^3$$

неособа и унирациональна. Докажите, что при $p \geq 3$ эта поверхность нерациональна. Таким образом, эта поверхность является контрпримером к проблеме Люрота.