Вороново — 2023.

Простые числа в арифметических прогрессиях. Семинар 5.

Задача 1.

Пусть p — простое число. Предположим, что гипотеза Римана верна для L-функции квадратичного характера $\chi_p(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$. Пусть n_p и ℓ_p — наименьший квадратичный невычет и наименьший простой квадратичный вычет $\bmod p$ соответственно. Рассмотрев сумму

$$\sum_n \Lambda(n)\chi_p(n)e^{-n/x}$$

для $x = n_p$ и ℓ_p, докажите, что $\max(n_p, \ell_p) = O(\ln^2 p)$.

Задача 2.

Пусть $p \equiv 3 \pmod 4$ — простое число, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$, $\mathcal{O}_K$ — соответствующее кольцо целых. Для каких q идеал $q\mathcal{O}_K$ раскладывается в произведение двух простых?

Задача 3.

В предположениях предыдущей задачи докажите, что если $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-p}}{2}\right]$ является кольцом главных идеалов, то $\ell_p = \frac{p+1}{4}$.

Задача 4.

Напомним, что $\tau_{\chi_p}(n) = \sum\limits_{d|n} \chi_p(d)$, а ℓ_p — наименьший простой квадратичный вычет $\bmod p$. Кроме того, мы уже знаем, что если $H(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tau_{\chi_p}(n)t^n$, $1/2 < t < 1$, то

$$H(t) = \frac{L(1,\chi)}{1-t} + O\left(\sqrt{p}\ln p \ln\frac{1}{1-t}\right)$$

а) Докажите, что при $n < \ell_p$ функция $\tau_{\chi_p}(n)$ совпадает с индикаторной функцией квадратов.

б) Выбрав $t = e^{-\ell_p/\ln \ell_p}$, докажите, что $\ell_p \ll p^{1/2+o(1)}$.

в) Заключите, что $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-p}}{2}\right]$ является кольцом главных идеалов лишь для конечного числа простых p.

Задача 5.

а) Разложите индикаторную функцию отрезка $[0, 1/2]$ в ряд Фурье на отрезке $[0, 1]$.

б) Пусть p — простое число, I — подотрезок в $[0, p]$, $N(I)$ и $R(I)$ — числа квадратичных невычетов и квадратичных вычетов на отрезке I. Докажите, что $R([0, p/2]) \geq N([0, p/2])$.

Задача 6.
Когда сходится ряд
$$f(z) = \sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt[3]{n}z}?$$
Докажите, что $f(z)$ имеет мероморфное продолжение во всё $\mathbb{C}$.
Задача 7.*
Зададим действие группы $SL_2(\mathbb{R})$ на верхней полуплоскости формулой
$$\gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$
где $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Докажите, что для любого τ найдется матрица γ из $SL_2(\mathbb{Z})$ такая, что $|\mathrm{Re}(\gamma\tau)| \leq \frac{1}{2}$ и $|\gamma\tau| \geq 1$.
Задача 8.*
Сопоставим всякой квадратичной форме $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ с целыми коэффициентами и отрицательным дискриминантом единственный корень τ_Q уравнения $Q(\tau, 1) = 0$, лежащий в верхней полуплоскости.

а) Пусть $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, определим $\gamma Q(x, y)$ формулой $Q(ax + cy, bx + dy)$. Докажите, что дискриминант формы не меняется при таком преобразовании. Что происходит с τ_Q?

б) Докажите, что всякая положительно определенная целочисленная форма с дискриминантом -4 приводится к виду $x^2 + y^2$ матрицей из $SL_2(\mathbb{Z})$.

в) Пусть $p \equiv 1 \pmod 4$. Постройте квадратичную форму дискриминанта -4, представляющую p, и выведите из этого Рождественскую Теорему Ферма: всякое простое число вида $4k + 1$ есть сумма двух квадратов.