Вороново — 2023.
Простые числа в арифметических прогрессиях. Семинар 4.

Задача 1. Пусть q — натуральное число и $(a, q) = 1$. Обозначим через $p(a, q)$ наименьшее простое число $p \equiv a \pmod q$ и положим $P(q) = \max\limits_{(a,q)=1} p(a, q)$.

а) Докажите, что при $q \to +\infty$

$$\frac{\ln \ln P(q)}{\ln q} \to 0.$$

б) Докажите, что для любого q выполнено

$$P(q) \gg \frac{q \ln q}{\ln \ln q}$$

Задача 2. Докажите, что обобщенная гипотеза Римана эквивалентна тому, что для всякого $(a, q) = 1$

$$\psi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(\sqrt{x}(\ln xq)^2).$$

Задача 3. Пусть χ_1, χ_2 — примитивные характеры по модулям q_1, q_2, а β_1, β_2 — вещественные нули соответствующих L-функций. Докажите, что

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c}{\ln q_1 q_2}.$$

Задача 4.
Докажите, что существует $c > 0$ такое, что для почти всех $q \le X$ (то есть кроме $o(X)$ исключений) выполнено

$$P(q) \le \exp(c \ln^2 q).$$

Задача 5.
Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в диске $|z| \le R$. Пусть $0 < r < R$, $M_r = \max\limits_{|z| \le r} |f(z)|$, а $N_R = \max\limits_{|z| \le R} \operatorname{Re} f(z)$. Докажите, что

$$M_r \le \frac{2r}{R - r} N_R + \frac{R + r}{R - r} |f(0)|.$$

Задача 6.
Пусть χ — примитивный характер $\mod q$, $s = \sigma + it$.

а) Пусть $\sigma \ge 1 - \frac{c}{\ln q}$. Докажите, что $L(s, \chi) \ll |s| \ln q$.

б) Докажите, что $|L(1+\varepsilon, \chi)| \gg \varepsilon$ (подразумеваемая константа не зависит от q).

в) Докажите, что если у $L(s, \chi)$ не нулей с $|s-1| \leq \frac{c}{\ln q}$, то

$$L(1, \chi) \gg \frac{1}{(\ln q)^{1+\varepsilon}}$$

Задача 7.
Докажите, что $\zeta(\sigma + it) \ll |t|^{1-\sigma}$ при $|t| \geq 2$.
Задача 8.
Пусть $\tau_3(n)$ — число решений уравнения $abc = n$ в натуральных числах. При помощи формулы Перрона найдите асимптотическую формулу для суммы

$$\sum_{n \leq x} \tau_3(n).$$