Вороново — 2023.
Простые числа в арифметических прогрессиях. Семинар 3.

Задача 1. Пусть χ — характер $\mod q$, индуцированный характером χ_1. Докажите, что при $\sigma > 0$ выполнено

$$\frac{L'}{L}(s;\chi) - \frac{L'}{L}(s;\chi_1) = O\left(\frac{\ln q}{\sigma}\right).$$

Задача 2. Пусть $\chi \mod q$ индуцирован характером χ_1. Оцените $\psi(x;\chi) - \psi(x;\chi_1)$.

Задача 3. Пусть β_1, β_2 — вещественные нули L-функции $L(s,\chi)$, где χ — вещественный характер. Докажите, что

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c}{\ln q}.$$

Задача 4. Оценив $L'(\sigma;\chi)$ сверху, докажите, что наибольший вещественный нуль $L(s;\chi)$ удовлетворяет неравенству

$$\beta < 1 - \frac{c}{\sqrt{q}\ln^4 q}.$$

Задача 5. При $q \le (\ln x)^{2-\varepsilon}$ докажите соотношение

$$\psi(x;q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(xe^{-c(\ln x)^{\varepsilon/3}}).$$

Задача 6. Докажите, что гипотеза Римана для $\zeta(s)$ верна только и только тогда, когда $\psi(x) = x + O(\sqrt{x}\ln^2 x)$.

Задача 7. Опишите все полюса функции $\Gamma(s)$ и вычислите вычеты. Докажите, что для любого $x > 0$ выполнено

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(s)x^{-s}ds.$$

Задача 8. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tau(n)e^{-nx}$. Докажите, что при $x \to 0$ выполнено равенство

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{x} + \frac{c}{x} + c_0 + c_1 x + \ldots + c_N x^N + O(x^{N+1}),$$

где $c_k = \frac{(-1)^k}{k!}\zeta(-k)^2$.

Задача 9.*

Пусть $h(x) = e^{-x/24}\prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1 - e^{-nx})$. Вычислите $\frac{h\left(\frac{4\pi^2}{x}\right)}{h(x)}$.