Вороново — 2023.
Простые числа в арифметических прогрессиях. Семинар 2.

Задача 1. Пусть χ — примитивный характер $\mod q \to +\infty$.

а) Докажите, что $L(1,\chi) \le \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)\ln q$.

б) Докажите, что $L(1/2,\chi) \le q^{1/4+o(1)}$.

Задача 2.

а) Пусть $s \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Вычислите

$$\int_0^1 (1-y)^n y^{s-1} dy.$$

б) Докажите, что

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1} dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)} = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{s}{m}\right)^{-1} e^{\frac{s}{m}}.$$

в) Докажите формулу отражения

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Задача 3.
Напомним, что для примитивного характера $\chi \mod q$ мы определили

$$\theta(x;\chi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n) e^{-\pi n^2 x/q}.$$

Докажите соотношение

$$\tau(\overline{\chi})\theta(x;\chi) = \sqrt{\frac{q}{x}}\theta\left(\frac{1}{x};\overline{\chi}\right).$$

Задача 4.

а) Докажите формулу

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

б) Выведите соотношение

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz,$$

где C_r — граница r-окрестности положительного луча, $0 < r < 2\pi$.

в) Докажите, что $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, $\zeta(-2m) = 0$ и $\zeta(1-2m) = -\frac{B_{2m}}{2m}$, где

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + \frac{z}{2} + B_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + B_{2m} \frac{z^{2m}}{(2m)!} + \ldots$$

Задача 5.

а) Пусть $\psi(x) = x + O(R(x))$, где $R(x)$ — монотонная функция такая, что $\sqrt{x} \le R(x) \le x$. Докажите, что

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + O\left(\frac{R(x)}{\ln x}\right)$$

б) Предположим, дополнительно, что $R(x) \le \frac{x}{\ln x}$. Докажите, что

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + M + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

для некоторой константы M.

в) Каких чисел $\le N$ больше, имеющих простой делитель в интервале $[\sqrt{N}, N]$ или не имеющих такого простого делителя?