Вороново — 2023.

Простые числа в арифметических прогрессиях. Семинар 1.

Задача 1.

Пусть p — нечетное простое число. Положим

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, \text{ если существует } x \neq 0 : n \equiv x^2 \pmod p \\ -1, \text{ если } n \not\equiv x^2 \pmod p \\ 0, \text{ если } n \equiv 0 \pmod p). \end{cases}$$

Покажите, что $\left(\frac{n}{p}\right)$ — характер Дирихле по модулю p. Чему равно $\tau\left(\left(\frac{\cdot}{p}\right)\right)$?

Задача 2.

Пусть χ — примитивный квадратичный характер $\mod q$. Положим

$$H(t) = \sum_{a=1}^{+\infty} \chi(a) \frac{t^a}{1-t^a} \text{ и } G(t) = H(t) - \frac{L(1,\chi)}{1-t}.$$

а) Докажите, что

$$G(t) = \sum_{a=1}^{+\infty} \chi(a) \left(\frac{t^a}{1-t^a} - \frac{t^a}{a(1-t)}\right) - \sum_{a=0}^{+\infty} S_{a+1} t^a,$$

где $S_a = \frac{\chi(a)}{a} + \frac{\chi(a+1)}{a+1} + \ldots$

б) Докажите, что $\frac{t^a}{1-t^a} - \frac{t^{a+1}}{1-t^{a+1}} > \frac{t^a}{a(a+1)(1-t)}$.

в) Выведите оценку $G(t) = O(\sqrt{q} \ln q \ln \frac{1}{1-t})$.

Задача 3.

Воспользовавшись теоремой Икехары-Винера, найдите асимптотические выражения для сумм

$$\sum_{n \le x} \varphi(n), \sum_{n \le x} \sigma_1(n), \sum_{n \le x} \sigma_3(n), \sum_{n \le x} sf(n),$$

где $sf(n)$ — индикаторная функция множества бесквадратных чисел, а $\sigma_k(n)$ — сумма $k-$ых степеней делителей n. Докажите те же формулы элементарно.

Задача 4.

Докажите, что у $\zeta(s)$ и $L(s,\chi)$ нет нулей с $\sigma > 1$.

Задача 5.

а) Докажите, что производящий ряд Дирихле $\Lambda(n)$ есть $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$.

б) Покажите, что при $\sigma > 1$ выполнено

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)\cos(t \ln n)}{n^\sigma}.$$

в) Рассмотрев сумму

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) - \mathrm{Re}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it),$$

покажите, что $\zeta(1+it) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Задача 6.
Пусть p — нечетное простое число и n_p — наименьший квадратичный невычет по модулю p. Докажите, что $n_p < \sqrt{p}$.
Задача 7.*
Пусть p — простое число, а χ_1, χ_2 — характеры Дирихле $\mod p$, хотя бы один из которых неглавный.

а) Докажите, что если $a \not\equiv 0 \pmod p$, то

$$\left|\sum_n \chi_1(n)\chi_2(a-n)\right| \leq \sqrt{p}.$$

б) Установите, что существует постоянная $c > 0$ такая, что при $p \geq ck^4$ всякий остаток $\mod p$ является суммой двух $k-$ых степеней.