Распределение простых чисел.
Экзамен

Задача 1.

а) (1 балл) Пусть для $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ и натурального k величина $\Pi(k; n)$ есть количество k-значных простых чисел, первая цифра которых равна n. Для всех n найдите

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\Pi(k; n)}{\Pi(k; 1) + \Pi(k; 2) + \ldots + \Pi(k; 9)}.$$

б) (4 балла) Что больше при больших k — $\Pi(k; 2) + \Pi(k; 3)$ или $\Pi(k; 4) + \Pi(k; 1)$?

Задача 2. (5 баллов)

Пусть $P(x)$ — количество произведений двух простых чисел, не превосходящих x. Докажите, что

$$P(x) \sim \frac{x \ln \ln x}{\ln x}.$$

Задача 3.

а) (2 балла) Пусть $\Omega(n)$ — количество простых делителей n с учетом кратности. Докажите, что

$$\sum_{n \leq x} \Omega(n) = x \ln \ln x + O(x).$$

б) (3 балла) Докажите, что

$$\sum_{n \leq x} (\Omega(n) - \ln \ln x)^2 \ll x \ln \ln x.$$

Выведите из этого, что число $\mathfrak{M}(x)$ чисел, представимых в виде ab с $a, b \leq x$ есть $o(x^2)$.

Задача 4.

а) (4 балла) Пусть $\gamma(n)$ — произведение всех простых делителей числа n. Докажите, что существует $c > 0$ такое, что при $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon} \gamma(n)} = \prod_{p} \left(1 + p^{-1-\varepsilon} + p^{-2-\varepsilon} + \ldots\right) \ll \zeta(1+\varepsilon)^{c/\varepsilon}$$

б) (2 балла) Используя трюк Ранкина, покажите, что при $x \to +\infty$

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{\gamma(n)} \ll \exp((\ln x)^{1/2+o(1)}).$$

Задача 5. Пусть A_+ и A_- — множества натуральных чисел, все простые делители которых имеют вид $3k+1$ и $3k-1$ соответственно.

а) (3 балла) Докажите, что

$$|A_\pm \cap [1,x]| \ll \frac{x}{\sqrt{\ln x}}.$$

б) (3 балла) Пусть

$$L_\pm(x) = \sum_{n \in A_\pm, n \le x} \frac{1}{n}.$$

Рассмотрите $L_+(x)L_-(x)$ и докажите, что

$$L_\pm(x) \asymp \sqrt{\ln x}.$$

Задача 6. (6 баллов) Пусть p — простое число, A и B — подмножества в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Используя разложение Фурье для характера Дирихле, докажите, что

$$\left| \sum_{a \in A, b \in B} \left(\frac{a+b}{p} \right) \right| \le \sqrt{p|A||B|}.$$

Задача 7. (6 баллов)
Докажите, что при $q \to +\infty$ выполнено равенство

$$\sum_{\substack{\chi \pmod q \\ \chi \ne \chi_0}} L(1,\chi) = \varphi(q)(1+o(1)).$$

Задача 8.

а) (3 балла) Докажите, что

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}dx}{e^x - 1}$$

и

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{z^{s-1}dz}{e^z - 1},$$

где $\rho \in (0, 2\pi)$ и C_ρ— граница $\rho-$окрестности положительного луча, причем интеграл сходится при всех комплексных s.

б) (2 балла) Докажите, что

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k \zeta(1-k)}{(k-1)!} x^k.$$

в) (1 балл) Докажите, что

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2x}{x^2+4\pi^2 n^2} = \frac{e^x+1}{e^x-1} - \frac{1}{x},$$

сравнивая коэффициенты Тейлора в нуле.

Задача 9.

а) (4 балла) Пусть χ — примитивный характер по модулю q. Докажите, что

$$\ln|L(1;\chi)| = \sum_{n\leq e^q} \frac{\Lambda(n)\operatorname{Re}\chi(n)}{n\ln n} + O(e^{-c\sqrt{q}}).$$

б) (2 балла) Докажите, что

$$\prod_{\substack{\chi \pmod q\\ \chi\neq\chi_0}} L(1;\chi) = q^{O(1)}.$$