Тернарная проблема Гольдбаха

Александр Калмынин

Распределение простых чисел
23 декабря 2020

1. Постановка задачи и круговой метод

Одна из проблем Ландау, которые обсуждались нами ранее, задаёт такой вопрос: верно ли, что всякое четное $2N > 2$ можно представить в виде суммы двух простых чисел?

1. Постановка задачи и круговой метод

Одна из проблем Ландау, которые обсуждались нами ранее, задаёт такой вопрос: верно ли, что всякое четное $2N > 2$ можно представить в виде суммы двух простых чисел? Данная задача поставлена Л. Эйлером в 1742 году в переписке с К. Гольдбахом, который выдвинул более слабую гипотезу такого вида:

Гипотеза 1

Правда ли, что любое нечетное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел?

1. Постановка задачи и круговой метод

Одна из проблем Ландау, которые обсуждались нами ранее, задаёт такой вопрос: верно ли, что всякое четное $2N > 2$ можно представить в виде суммы двух простых чисел? Данная задача поставлена Л. Эйлером в 1742 году в переписке с К. Гольдбахом, который выдвинул более слабую гипотезу такого вида:

Гипотеза 1

Правда ли, что любое нечетное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел?

Две эти задачи ныне называются бинарной (или сильной) и тернарной (или слабой) гипотезами Гольдбаха. В этой лекции мы обсудим доказательство следующей теоремы, принадлежащей И. М. Виноградову.

1. Постановка задачи и круговой метод

Одна из проблем Ландау, которые обсуждались нами ранее, задаёт такой вопрос: верно ли, что всякое четное $2N > 2$ можно представить в виде суммы двух простых чисел? Данная задача поставлена Л. Эйлером в 1742 году в переписке с К. Гольдбахом, который выдвинул более слабую гипотезу такого вида:

Гипотеза 1

Правда ли, что любое нечетное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел?

Две эти задачи ныне называются бинарной (или сильной) и тернарной (или слабой) гипотезами Гольдбаха. В этой лекции мы обсудим доказательство следующей теоремы, принадлежащей И. М. Виноградову.

Теорема 1 (Виноградов, 1937)

Существует натуральное N_0, такое, что любое нечетное $N > N_0$ представимо в виде суммы трёх простых чисел.

1. Постановка задачи и круговой метод

Наше доказательство будет опираться на теорему Зигеля-Вальфиша и потому, как и изначальное доказательство Виноградова, не позволит нам дать какую-либо явную оценку на допустимое значение N_0.

1. Постановка задачи и круговой метод

Наше доказательство будет опираться на теорему Зигеля-Вальфиша и потому, как и изначальное доказательство Виноградова, не позволит нам дать какую-либо явную оценку на допустимое значение N_0. Дальнейшее развитие использующихся в доказательстве техник позволило получить такие явные значения:

- $N_0 \leq 3^{3^{15}}$, К. Бороздин, 1939

1. Постановка задачи и круговой метод

Наше доказательство будет опираться на теорему Зигеля-Вальфиша и потому, как и изначальное доказательство Виноградова, не позволит нам дать какую-либо явную оценку на допустимое значение N_0. Дальнейшее развитие использующихся в доказательстве техник позволило получить такие явные значения:

- $N_0 \leq 3^{3^{15}}$, К. Бороздин, 1939
- $N_0 \leq 3.33 \cdot 10^{43000}$, Чен и Ванг, 1989

1. Постановка задачи и круговой метод

Наше доказательство будет опираться на теорему Зигеля-Вальфиша и потому, как и изначальное доказательство Виноградова, не позволит нам дать какую-либо явную оценку на допустимое значение N_0. Дальнейшее развитие использующихся в доказательстве техник позволило получить такие явные значения:

- $N_0 \leq 3^{3^{15}}$, К. Бороздин, 1939
- $N_0 \leq 3.33 \cdot 10^{43000}$, Чен и Ванг, 1989
- $N_0 \leq 2 \cdot 10^{1346}$ Лю и Ванг, 2002

1. Постановка задачи и круговой метод

Наше доказательство будет опираться на теорему Зигеля-Вальфиша и потому, как и изначальное доказательство Виноградова, не позволит нам дать какую-либо явную оценку на допустимое значение N_0. Дальнейшее развитие использующихся в доказательстве техник позволило получить такие явные значения:

- $N_0 \leq 3^{3^{15}}$, К. Бороздин, 1939
- $N_0 \leq 3.33 \cdot 10^{43000}$, Чен и Ванг, 1989
- $N_0 \leq 2 \cdot 10^{1346}$ Лю и Ванг, 2002и, наконец,
- $N_0 = 5$, Хельфготт, 2013.

1. Постановка задачи и круговой метод

Наше доказательство будет опираться на теорему Зигеля-Вальфиша и потому, как и изначальное доказательство Виноградова, не позволит нам дать какую-либо явную оценку на допустимое значение N_0. Дальнейшее развитие использующихся в доказательстве техник позволило получить такие явные значения:

- $N_0 \le 3^{3^{15}}$, К. Бороздин, 1939
- $N_0 \le 3.33 \cdot 10^{43000}$, Чен и Ванг, 1989
- $N_0 \le 2 \cdot 10^{1346}$ Лю и Ванг, 2002и, наконец,
- $N_0 = 5$, Хельфготт, 2013.

Первый шаг, нужный для доказательства Теоремы 1 — это сведение аддитивной задачи к изучению свойств экспоненциальных сумм. Более точно, пусть N — большое нечетное число. Определим величину $\rho(N;3)$ как сумму функции $\Lambda(a)\Lambda(b)\Lambda(c)$ по всем (a,b,c) с условием $a+b+c=N$. Тогда

$$\rho(N;3) = \int_0^1 T(\alpha)^3 e^{-2\pi i N\alpha} d\alpha.$$

Здесь
$$T(\alpha) = \sum_{n \le N} \Lambda(n) e^{2\pi i n\alpha}.$$

1. Постановка задачи и круговой метод

Здесь

$$T(\alpha) = \sum_{n \le N} \Lambda(n) e^{2\pi i n \alpha}.$$

В самом деле,

$$T(\alpha)^3 = \sum_{a,b,c \le N} \Lambda(a)\Lambda(b)\Lambda(b) e^{2\pi i (a+b+c)\alpha},$$

так что для интеграла получаем выражение

1. Постановка задачи и круговой метод

Здесь

$$T(\alpha) = \sum_{n \le N} \Lambda(n) e^{2\pi i n\alpha}.$$

В самом деле,

$$T(\alpha)^3 = \sum_{a,b,c \le N} \Lambda(a)\Lambda(b)\Lambda(b) e^{2\pi i(a+b+c)\alpha},$$

так что для интеграла получаем выражение

$$\int_0^1 T(\alpha)^3 e^{-2\pi i N\alpha} = \sum_{a,b,c \le N} \Lambda(a)\Lambda(b)\Lambda(c) \int_0^1 e^{2\pi i\alpha(a+b+c-N)} d\alpha.$$

Нужное нам равенство получается теперь из равенства

$$\int_0^1 e^{2\pi i m\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1 \text{ если } m = 0 \\ 0 \text{ если } m \ne 0. \end{cases}$$

1. Постановка задачи и круговой метод

Для вычисления интеграла, задающего $\rho(N;3)$, будем пользоваться так называемым круговым методом. Более точно, мы будем разбивать числа из интервала интегрирования на два множества в зависимости от того, какими рациональными числами они приближаются.

1. Постановка задачи и круговой метод

Для вычисления интеграла, задающего $\rho(N;3)$, будем пользоваться так называемым круговым методом. Более точно, мы будем разбивать числа из интервала интегрирования на два множества в зависимости от того, какими рациональными числами они приближаются. Для того, чтобы обеспечить существование нужного нам разбиения, мы будем пользоваться таким утверждением:

Лемма 1

Для любого вещественного α и $Q \geq 1$ существуют взаимно простые p и q с условиями $1 \leq q \leq Q$ и

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

1. Постановка задачи и круговой метод

Для вычисления интеграла, задающего $\rho(N;3)$, будем пользоваться так называемым круговым методом. Более точно, мы будем разбивать числа из интервала интегрирования на два множества в зависимости от того, какими рациональными числами они приближаются. Для того, чтобы обеспечить существование нужного нам разбиения, мы будем пользоваться таким утверждением:

Лемма 1

Для любого вещественного α и $Q \geq 1$ существуют взаимно простые p и q с условиями $1 \leq q \leq Q$ и

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qQ}.$$

Для доказательства надо разбить отрезок $[0,1]$ на множества вида $\left\|x - \frac{n}{Q}\right\| \leq \frac{1}{Q}$ и рассмотреть числа $\{m\alpha\}$ с $1 \leq m \leq Q$.

1. Постановка задачи и круговой метод

Если в первое из множеств попадает хотя бы одно из рассматриваемых чисел или в одно из множеств попадает хотя бы два числа, то доказательство окончено. Другие случаи невозможны согласно принципу Дирихле.

1. Постановка задачи и круговой метод

Если в первое из множеств попадает хотя бы одно из рассматриваемых чисел или в одно из множеств попадает хотя бы два числа, то доказательство окончено. Другие случаи невозможны согласно принципу Дирихле. Возьмем теперь две константы $A, B > 0$ и определим числа $\tau = N(\ln N)^{-A}$ и $\tau_0 = (\ln N)^B$. Сдвинем наш интервал интегрирования на $-\frac{1}{\tau}$ и определим множества

$$E_1 = \bigcup_{q \leq \tau_0} \bigcup_{(a,q)=1} \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau}; \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}\right] \text{ и } E_2 = \left[-\frac{1}{\tau}; 1 - \frac{1}{\tau}\right] \setminus E_1$$

Если в первое из множеств попадает хотя бы одно из рассматриваемых чисел или в одно из множеств попадает хотя бы два числа, то доказательство окончено. Другие случаи невозможны согласно принципу Дирихле. Возьмем теперь две константы $A, B > 0$ и определим числа $\tau = N(\ln N)^{-A}$ и $\tau_0 = (\ln N)^B$. Сдвинем наш интервал интегрирования на $-\frac{1}{\tau}$ и определим множества

$$E_1 = \bigcup_{q \le \tau_0} \bigcup_{(a,q)=1} \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau}; \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}\right] \text{ и } E_2 = \left[-\frac{1}{\tau}; 1 - \frac{1}{\tau}\right] \setminus E_1$$

Заметим, что отрезки из определения E_1 попарно не пересекаются для достаточно больших N. В самом деле, если для каких-то различных пар (a_1, q_1) и (a_2, q_2) отрезки пересекаются, то

$$\frac{2}{\tau} \ge \frac{1}{q_1\tau} + \frac{1}{q_2\tau} \ge \left|\frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2}\right| = \frac{|a_1q_2 - a_2q_1|}{q_1q_2} \ge \frac{1}{q_1q_2} \ge \frac{1}{\tau_0^2},$$

откуда $(\ln N)^{2B+A} \ge 2N$, что неверно для больших N.

Кроме того, из Леммы 1 следует, что любой элемент $\alpha \in E_2$ хорошо приближается рациональной дробью с большим знаменателем.

Кроме того, из Леммы 1 следует, что любой элемент $\alpha \in E_2$ хорошо приближается рациональной дробью с большим знаменателем. А именно, для таких α существуют взаимно простые p и q такие, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

и $\tau_0 < q \leq \tau$.

Кроме того, из Леммы 1 следует, что любой элемент $\alpha \in E_2$ хорошо приближается рациональной дробью с большим знаменателем. А именно, для таких α существуют взаимно простые p и q такие, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

и $\tau_0 < q \leq \tau$. Множества E_1 и E_2 называются большими и малыми дугами соответственно. С одной стороны, данное название немного парадоксально, поскольку E_1 очень мало по мере. С другой стороны, в дальнейшем окажется, что интеграл по E_1 даёт самый ощутимый вклад в $\rho(3;N)$, в то время как интеграл по E_2 можно отбросить, не оказав влияния на асимптотику.

Кроме того, из Леммы 1 следует, что любой элемент $\alpha \in E_2$ хорошо приближается рациональной дробью с большим знаменателем. А именно, для таких α существуют взаимно простые p и q такие, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$$

и $\tau_0 < q \leq \tau$. Множества E_1 и E_2 называются большими и малыми дугами соответственно. С одной стороны, данное название немного парадоксально, поскольку E_1 очень мало по мере. С другой стороны, в дальнейшем окажется, что интеграл по E_1 даёт самый ощутимый вклад в $\rho(3; N)$, в то время как интеграл по E_2 можно отбросить, не оказав влияния на асимптотику.

2. Большие дуги

Здесь мы разберемся с интегралами по окрестностям чисел с малыми знаменателями. У нас получится такое приближение:

Лемма 2

При $q \le \tau_0$ *и* $(a,q) = 1$ *имеет место равенство*

$$\int_{a/q-1/q\tau}^{a/q+1/q\tau} T(\alpha)^3 e^{-2\pi i N\alpha} d\alpha = \frac{N^2\mu(q)}{2\varphi(q)^3} e^{-2\pi i N a/q} + O(q^2\tau^2\varphi(q)^{-3}).$$

Здесь мы разберемся с интегралами по окрестностям чисел с малыми знаменателями. У нас получится такое приближение:

Лемма 2

При $q \le \tau_0$ *и* $(a, q) = 1$ *имеет место равенство*

$$\int_{a/q-1/q\tau}^{a/q+1/q\tau} T(\alpha)^3 e^{-2\pi i N\alpha} d\alpha = \frac{N^2\mu(q)}{2\varphi(q)^3} e^{-2\pi i Na/q} + O(q^2\tau^2\varphi(q)^{-3}).$$

Обозначим рассматриваемый интеграл через $I(a; q)$. Сдвигая переменную на $-a/q$, получаем

$$I(a; q) = e^{-2\pi i Na/q} \int_{-1/q\tau}^{1/q\tau} T\left(\frac{a}{q} + z\right)^3 e^{-2\pi i Nz} dz.$$

Здесь мы разберемся с интегралами по окрестностям чисел с малыми знаменателями. У нас получится такое приближение:

Лемма 2

При $q \le \tau_0$ *и* $(a,q)=1$ *имеет место равенство*

$$\int_{a/q-1/q\tau}^{a/q+1/q\tau} T(\alpha)^3 e^{-2\pi i N\alpha} d\alpha = \frac{N^2\mu(q)}{2\varphi(q)^3} e^{-2\pi i Na/q} + O(q^2\tau^2\varphi(q)^{-3}).$$

Обозначим рассматриваемый интеграл через $I(a;q)$. Сдвигая переменную на $-a/q$, получаем

$$I(a;q) = e^{-2\pi i Na/q} \int_{-1/q\tau}^{1/q\tau} T\left(\frac{a}{q}+z\right)^3 e^{-2\pi i Nz} dz.$$

Естественно ожидать, что можно с хорошей точностью заменить $\Lambda(n)$ на тождественную единицу. В этом нам поможет распределение простых чисел в арифметических прогрессиях.

2. Большие дуги

Разбивая $n \leq N$ на классы вычетов по модулю q, получаем

$$T\left(z+\frac{a}{q}\right)=\sum_{(b,q)=1} e^{2\pi i a b/q} \sum_{\substack{n\leq N\\ n\equiv b \pmod q}} \Lambda(n) e^{2\pi i n z} + O(\ln^2 N).$$

2. Большие дуги

Разбивая $n \le N$ на классы вычетов по модулю q, получаем

$$T\left(z+\frac{a}{q}\right) = \sum_{(b,q)=1} e^{2\pi i ab/q} \sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv b \pmod q}} \Lambda(n)e^{2\pi i nz} + O(\ln^2 N).$$

Для суммы по классу вычетов при помощи суммирования по частям получаем

$$\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv b \pmod q}} \Lambda(n)e^{2\pi i nz} = \psi(N;q,b)e^{2\pi i Nz} - 2\pi i z\int_0^N \psi(x;q,l)e^{2\pi i xz}dx.$$

Разбивая $n \le N$ на классы вычетов по модулю q, получаем

$$T\left(z+\frac{a}{q}\right) = \sum_{(b,q)=1} e^{2\pi i ab/q} \sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv b \pmod q}} \Lambda(n) e^{2\pi i n z} + O(\ln^2 N).$$

Для суммы по классу вычетов при помощи суммирования по частям получаем

$$\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv b \pmod q}} \Lambda(n) e^{2\pi i n z} = \psi(N;q,b)e^{2\pi i N z} - 2\pi i z \int_0^N \psi(x;q,l) e^{2\pi i x z} dx.$$

Согласно теореме Зигеля-Вальфиша, имеем $\psi(x;q,l) = \frac{[x]}{\varphi(q)} + O(xe^{-c(B)\sqrt{\ln N}})$ для некоторого $c(B) > 0$ при $x \ge \sqrt{N}$.

2. Большие дуги

Таким образом,

$$\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv b \pmod q}} \Lambda(n)e^{2\pi inz} = \frac{N}{\varphi(q)}e^{2\pi iNz} - 2\pi iz\int_0^N \frac{[x]}{\varphi(q)}e^{2\pi ixz}dx +$$

$$+O\left(N^2|z|e^{-c(B)\sqrt{\ln N}}\right)$$

Таким образом,

$$\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv b \pmod q}} \Lambda(n)e^{2\pi inz} = \frac{N}{\varphi(q)}e^{2\pi iNz} - 2\pi iz\int_0^N \frac{[x]}{\varphi(q)}e^{2\pi ixz}dx+$$

$$+O\left(N^2|z|e^{-c(B)\sqrt{\ln N}}\right) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{n\le N} e^{2\pi inz} + O\left(Ne^{-c_1(A,B)\sqrt{\ln N}}\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv b \pmod q}} \Lambda(n)e^{2\pi inz} = \frac{N}{\varphi(q)}e^{2\pi iNz} - 2\pi iz\int_0^N \frac{[x]}{\varphi(q)}e^{2\pi ixz}dx +$$

$$+O\left(N^2|z|e^{-c(B)\sqrt{\ln N}}\right) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{n\le N} e^{2\pi inz} + O\left(Ne^{-c_1(A,B)\sqrt{\ln N}}\right).$$

Последнее равенство верно, поскольку $|z| \le 1/\tau = (\ln N)^A N^{-1}$, а интеграл с целой частью можно преобразовать в линейную экспоненциальную сумму при помощи суммирования по частям.

Таким образом,

$$\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv b \pmod q}} \Lambda(n)e^{2\pi inz} = \frac{N}{\varphi(q)}e^{2\pi iNz} - 2\pi iz\int_0^N \frac{[x]}{\varphi(q)}e^{2\pi ixz}dx +$$

$$+O\left(N^2|z|e^{-c(B)\sqrt{\ln N}}\right) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{n\le N} e^{2\pi inz} + O\left(Ne^{-c_1(A,B)\sqrt{\ln N}}\right).$$

Последнее равенство верно, поскольку $|z| \le 1/\tau = (\ln N)^A N^{-1}$, а интеграл с целой частью можно преобразовать в линейную экспоненциальную сумму при помощи суммирования по частям. Суммируя по классам вычетов и учитывая оценку $q \le \tau_0 = (\ln N)^B$, получаем для некоторого $c_2(A,B) > 0$

$$T\left(z+\frac{a}{q}\right) = \frac{\sum\limits_{(b,q)=1} e^{2\pi iab/q}}{\varphi(q)}L(z) + O\left(Ne^{-c_2(A,B)\sqrt{\ln N}}\right),$$

2. Большие дуги

где

$$L(z) = \sum_{n \le N} e^{2\pi i n z}.$$

где
$$L(z)=\sum_{n\leq N} e^{2\pi i n z}.$$
Вычислим сумму в числителе. Ясно, что ab пробегает приведенную систему вычетов по модулю q, так что
$$\sum_{(b,q)=1} e^{2\pi i ab/q}=\sum_{(b,q)=1} e^{2\pi i b/q}=$$

где

$$L(z) = \sum_{n \le N} e^{2\pi i n z}.$$

Вычислим сумму в числителе. Ясно, что ab пробегает приведенную систему вычетов по модулю q, так что

$$\sum_{(b,q)=1} e^{2\pi i ab/q} = \sum_{(b,q)=1} e^{2\pi i b/q} = \sum_{b=1}^{q} \left(\sum_{d|(b,q)} \mu(d) \right) e^{2\pi i b/q} =$$

где

$$L(z) = \sum_{n \le N} e^{2\pi i n z}.$$

Вычислим сумму в числителе. Ясно, что ab пробегает приведенную систему вычетов по модулю q, так что

$$\sum_{(b,q)=1} e^{2\pi i ab/q} = \sum_{(b,q)=1} e^{2\pi i b/q} = \sum_{b=1}^{q} \left(\sum_{d|(b,q)} \mu(d) \right) e^{2\pi i b/q} =$$

$$= \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{c=1}^{q/d} e^{2\pi i c d/q} = \mu(q),$$

поскольку внутренняя сумма равна 0 для всех $d < q$.

2. Большие дуги

Возводя в куб, из тривиальной оценки $|L(z)| \le N$ получаем

$$T\left(z+\frac{a}{q}\right)^3 = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3}L(z)^3 + O\left(N^3 e^{-c_2(A,B)\sqrt{\ln N}}\right).$$

Возводя в куб, из тривиальной оценки $|L(z)| \le N$ получаем

$$T\left(z+\frac{a}{q}\right)^3 = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3}L(z)^3 + O\left(N^3 e^{-c_2(A,B)\sqrt{\ln N}}\right).$$

Отсюда

$$I(a;q) = e^{-2\pi i N a/q}\frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3}\int_{-1/q\tau}^{1/q\tau} L(z)^3 e^{-2\pi i N z}dz + O\left(N^2 e^{-c_3(A,B)\sqrt{\ln N}}\right).$$

Возводя в куб, из тривиальной оценки $|L(z)| \le N$ получаем

$$T\left(z+\frac{a}{q}\right)^3 = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3} L(z)^3 + O\left(N^3 e^{-c_2(A,B)\sqrt{\ln N}}\right).$$

Отсюда

$$I(a;q) = e^{-2\pi i N a/q} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)^3} \int_{-1/q\tau}^{1/q\tau} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz + O\left(N^2 e^{-c_3(A,B)\sqrt{\ln N}}\right).$$

Осталось только заменить интеграл по нашему короткому отрезку полным интегралом от $-1/2$ до $1/2$. Для этого заметим, что

$$L(z) = \sum_{n \le N} e^{2\pi i n z} = \frac{e^{2\pi i (N+1) z} - e^{2\pi i z}}{e^{2\pi i z} - 1} \ll \frac{1}{||z||},$$

так что

$$\int_{-1/q\tau}^{1/q\tau} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz = \int_{-1/2}^{1/2} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz + O\left(\int_{1/q\tau}^{1/2} \frac{dz}{z^3}\right) =$$
$$= \gamma + O(q^2\tau^2),$$

где γ означает интеграл по отрезку $[-1/2, 1/2]$.

$$\int_{-1/q\tau}^{1/q\tau} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz = \int_{-1/2}^{1/2} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz + O\left(\int_{1/q\tau}^{1/2} \frac{dz}{z^3}\right) =$$

$$= \gamma + O(q^2\tau^2),$$

где γ означает интеграл по отрезку $[-1/2, 1/2]$. Его легко вычислить, вновь используя аддитивную интерпретацию

$$\gamma = \int_{-1/2}^{1/2} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz = \sum_{a,b,c \le N} \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i (a+b+c-N) z} = \#\{a+b+c = N\}.$$

2. Большие дуги

$$\int_{-1/q\tau}^{1/q\tau} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz = \int_{-1/2}^{1/2} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz + O\left(\int_{1/q\tau}^{1/2} \frac{dz}{z^3}\right) =$$

$$= \gamma + O(q^2\tau^2),$$

где γ означает интеграл по отрезку $[-1/2, 1/2]$. Его легко вычислить, вновь используя аддитивную интерпретацию

$$\gamma = \int_{-1/2}^{1/2} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz = \sum_{a,b,c \le N} \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i (a+b+c-N) z} = \#\{a+b+c = N\}.$$

Таким образом, $\gamma = \frac{(N-1)(N-2)}{2} = N^2/2 + O(N)$. Подставляя это в наше равенство, получаем утверждение Леммы 2.

2. Большие дуги

$$\int_{-1/q\tau}^{1/q\tau} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz = \int_{-1/2}^{1/2} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz + O\left(\int_{1/q\tau}^{1/2} \frac{dz}{z^3}\right) =$$
$$= \gamma + O(q^2\tau^2),$$

где γ означает интеграл по отрезку $[-1/2, 1/2]$. Его легко вычислить, вновь используя аддитивную интерпретацию

$$\gamma = \int_{-1/2}^{1/2} L(z)^3 e^{-2\pi i N z} dz = \sum_{a,b,c \le N} \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i (a+b+c-N)z} = \#\{a+b+c = N\}.$$

Таким образом, $\gamma = \frac{(N-1)(N-2)}{2} = N^2/2 + O(N)$. Подставляя это в наше равенство, получаем утверждение Леммы 2. Из Леммы 2 получается формула для интеграла по большим дугам:

Следствие 1

$$\int_{E_1} T(\alpha)^3 e^{-2\pi i N \alpha} d\alpha = \sum_{q \le \tau_0} \frac{N^2 \mu(q)}{2\varphi(q)^3} \sum_{(a,q)=1} e^{-2\pi i N a/q} + O(\tau^2 \tau_0 \ln\ln^2 N).$$

3. Малые дуги

В этом разделе мы воспользуемся некоторой свёрточной формулой для $\Lambda(n)$, чтобы получить оценку для $T(\alpha)$ на множестве E_2.

3. Малые дуги

В этом разделе мы воспользуемся некоторой свёрточной формулой для $\Lambda(n)$, чтобы получить оценку для $T(\alpha)$ на множестве E_2. Более того, мы получим общую оценку для суммы вида

$$S(f,N)=\sum_{n\le N} f(n)\Lambda(n)$$

для произвольной функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ с условием $|f(n)|\le 1$.

В этом разделе мы воспользуемся некоторой свёрточной формулой для $\Lambda(n)$, чтобы получить оценку для $T(\alpha)$ на множестве E_2. Более того, мы получим общую оценку для суммы вида

$$S(f,N) = \sum_{n \le N} f(n)\Lambda(n)$$

для произвольной функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ с условием $|f(n)| \le 1$. Хотя оценка будет выполняться для всех f, полезна она будет только для "осциллирующих" функций. В данном случае, под осцилляцией будет пониматься наличие сокращений во многих суммах вида

$$\sum_{n \le X} f(mn)\overline{f(mk)}.$$

3. Малые дуги

В этом разделе мы воспользуемся некоторой свёрточной формулой для $\Lambda(n)$, чтобы получить оценку для $T(\alpha)$ на множестве E_2. Более того, мы получим общую оценку для суммы вида

$$S(f, N) = \sum_{n \leq N} f(n)\Lambda(n)$$

для произвольной функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ с условием $|f(n)| \leq 1$. Хотя оценка будет выполняться для всех f, полезна она будет только для "осциллирующих" функций. В данном случае, под осцилляцией будет пониматься наличие сокращений во многих суммах вида

$$\sum_{n \leq X} f(mn)\overline{f(mk)}.$$

Сформулируем тождество Виноградова в форме Вона, которое поможет нам получить нужные нам оценки:

Лемма 3 (Тождество Виноградова в форме Вона)

Пусть $U, V \geq 1$. Тогда выполнено равенство

$$\Lambda(n) = a(n) + b(n) + c(n) + d(n),$$

где

$$a(n) = \Lambda(n) 1_{n \leq U},\ b(n) = -\sum_{\substack{mdr=n \\ m\leq U, d\leq V}} \Lambda(m)\mu(d),$$

$$c(n) = \sum_{\substack{md=n \\ d\leq V}} \mu(d) \ln h \ \text{и}\ d(n) = -\sum_{\substack{mk=n \\ m>U, k>1}} \Lambda(m) \left(\sum_{\substack{d|k \\ d\leq V}} \mu(d) \right).$$

3. Малые дуги

Лемму 3 можно доказать так: пусть $F(s)$ и $G(s)$ заданы формулами

$$F(s) = \sum_{m \leq U} \Lambda(m) m^{-s}, \quad G(s) = \sum_{d \leq V} \mu(d) d^{-s}.$$

Лемму 3 можно доказать так: пусть $F(s)$ и $G(s)$ заданы формулами

$$F(s) = \sum_{m \le U} \Lambda(m) m^{-s}, \quad G(s) = \sum_{d \le V} \mu(d) d^{-s}.$$

Тогда

$$\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - F(s)\right)(1 - \zeta(s)G(s)) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - F(s) + \zeta'(s)G(s) + \zeta(s)F(s)G(s).$$

Лемму 3 можно доказать так: пусть $F(s)$ и $G(s)$ заданы формулами

$$F(s) = \sum_{m \le U} \Lambda(m) m^{-s}, \quad G(s) = \sum_{d \le V} \mu(d) d^{-s}.$$

Тогда

$$\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - F(s)\right)(1-\zeta(s)G(s)) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - F(s) + \zeta'(s)G(s) + \zeta(s)F(s)G(s).$$

Слева написан производящий ряд Дирихле для $d(n)$, справа — ряды для $\Lambda(n), -a(n), -c(n)$ и $-b(n)$ соответственно.

Лемму 3 можно доказать так: пусть $F(s)$ и $G(s)$ заданы формулами

$$F(s) = \sum_{m \le U} \Lambda(m) m^{-s}, \quad G(s) = \sum_{d \le V} \mu(d) d^{-s}.$$

Тогда

$$\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - F(s)\right)(1-\zeta(s)G(s)) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)-F(s)+\zeta'(s)G(s)+\zeta(s)F(s)G(s).$$

Слева написан производящий ряд Дирихле для $d(n)$, справа — ряды для $\Lambda(n), -a(n), -c(n)$ и $-b(n)$ соответственно. Разложение $\Lambda(n)$ позволяет превратить любую сумму $S(f, N)$ в комбинацию коротких, "линейных" и "билинейных" сумм с функцией f. В самом деле, из Леммы 3 получаем

$$S(f, N) = \sum_{n \le N} (a(n) + b(n) + c(n) + d(n)) f(n) =$$

$$S_a(f, N) + S_b(f, N) + S_c(f, N) + S_d(f, N),$$

где $S_x(f,N)$ при $x \in \{a,b,c,d\}$ означает сумму $x(n)f(n)$ по $n \le N$.

3. Малые дуги

где $S_x(f, N)$ при $x \in \{a, b, c, d\}$ означает сумму $x(n)f(n)$ по $n \le N$. Сумма $S_a(f, N)$ является короткой, так что оценим её тривиально, учитывая, что $|f(n)| \le 1$:

$$|S_a(f, N)| = \left| \sum_{n \le U} f(n)\Lambda(n) \right| \le \sum_{n \le U} \Lambda(n) \ll U.$$

где $S_x(f, N)$ при $x \in \{a, b, c, d\}$ означает сумму $x(n)f(n)$ по $n \leq N$. Сумма $S_a(f, N)$ является короткой, так что оценим её тривиально, учитывая, что $|f(n)| \leq 1$:

$$|S_a(f, N)| = \left| \sum_{n \leq U} f(n)\Lambda(n) \right| \leq \sum_{n \leq U} \Lambda(n) \ll U.$$

Чтобы оценить $S_b(f, N)$, воспользуемся равенством $\sum\limits_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$:

$$S_b(f, N) = -\sum_{t \leq UV} \left(\sum_{\substack{md=t \\ m \leq U, d \leq V}} \mu(d)\Lambda(m) \right) \sum_{r \leq N/t} f(rt) \ll$$

где $S_x(f,N)$ при $x \in \{a,b,c,d\}$ означает сумму $x(n)f(n)$ по $n \le N$. Сумма $S_a(f,N)$ является короткой, так что оценим её тривиально, учитывая, что $|f(n)| \le 1$:

$$|S_a(f,N)| = \left| \sum_{n \le U} f(n)\Lambda(n) \right| \le \sum_{n \le U} \Lambda(n) \ll U.$$

Чтобы оценить $S_b(f,N)$, воспользуемся равенством $\sum\limits_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$:

$$S_b(f,N) = -\sum_{t \le UV} \left(\sum_{\substack{md=t \\ m \le U, d \le V}} \mu(d)\Lambda(m) \right) \sum_{r \le N/t} f(rt) \ll$$

$$\ln UV \sum_{t \le UV} \left| \sum_{r \le N/t} f(rt) \right|.$$

где $S_x(f,N)$ при $x \in \{a,b,c,d\}$ означает сумму $x(n)f(n)$ по $n \le N$. Сумма $S_a(f,N)$ является короткой, так что оценим её тривиально, учитывая, что $|f(n)| \le 1$:

$$|S_a(f,N)| = \left| \sum_{n \le U} f(n)\Lambda(n) \right| \le \sum_{n \le U} \Lambda(n) \ll U.$$

Чтобы оценить $S_b(f,N)$, воспользуемся равенством $\sum\limits_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$:

$$S_b(f,N) = -\sum_{t \le UV} \left(\sum_{\substack{md=t \\ m \le U, d \le V}} \mu(d)\Lambda(m) \right) \sum_{r \le N/t} f(rt) \ll$$

$$\ln UV \sum_{t \le UV} \left| \sum_{r \le N/t} f(rt) \right|.$$

Такие суммы можно назвать линейными, поскольку в оценках участвую суммы мультипликативных сдвигов f по сплошным интервалам.

3. Малые дуги

Сумму S_c мы оценим похожим способом, используя интегральное представление для логарифма:

3. Малые дуги

Сумму S_c мы оценим похожим способом, используя интегральное представление для логарифма:

$$S_3 = \sum_{d \le V} \mu(d) \sum_{h \le N/d} f(dh) \ln h = \sum_{d \le V} \mu(d) \sum_{h \le N/d} f(dh) \int_1^h \frac{dx}{x} =$$

Сумму S_c мы оценим похожим способом, используя интегральное представление для логарифма:

$$S_3 = \sum_{d\le V} \mu(d) \sum_{h\le N/d} f(dh) \ln h = \sum_{d\le V} \mu(d) \sum_{h\le N/d} f(dh) \int_1^h \frac{dx}{x} =$$

$$= \int_1^N \sum_{d\le V} \mu(d) \sum_{x\le h\le N/d} f(dh) \frac{dx}{x} \le \ln N \sum_{d\le V} \max_x \left| \sum_{x\le h\le N/d} f(dh) \right|.$$

Сумму S_c мы оценим похожим способом, используя интегральное представление для логарифма:

$$S_3 = \sum_{d\le V}\mu(d)\sum_{h\le N/d} f(dh)\ln h = \sum_{d\le V}\mu(d)\sum_{h\le N/d} f(dh)\int_1^h \frac{dx}{x} =$$

$$= \int_1^N \sum_{d\le V}\mu(d)\sum_{x\le h\le N/d} f(dh)\frac{dx}{x} \le \ln N \sum_{d\le V}\max_x\left|\sum_{x\le h\le N/d} f(dh)\right|.$$

Собирая полученные оценки вместе, получаем при $UV\le N$ такое неравенство

$$S_a(f,N)+S_b(f,N)+S_c(f,N) \ll U + \ln N \sum_{t\le UV}\max_x\left|\sum_{x\le r\le N/t} f(rt)\right|.$$

Осталось разобраться с последней суммой. Пользуясь определением $d(n)$ и замечая, что $u(n) = \sum_{d|k, d \le V} \mu(d) = 0$ при $1 < d \le V$, легко переписать S_d в виде

$$S_d(f, N) = \sum_{\substack{U < m \le N/V \\ V < k \le N/m}} \Lambda(m) u(k) f(mk).$$

Представим себе, что нам для всех пар последовательностей x и y для всех $U \le M \le N/V$ удалось доказать неравенство

$$\left| \sum_{\substack{M \le m \le 2M \\ V < k \le N/m}} x_m y_k f(mk) \right| \le \Delta \left(\sum_{M < m \le 2M} |x_m|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \le N/M} |y_k|^2 \right)^{1/2}$$

3. Малые дуги

Осталось разобраться с последней суммой. Пользуясь определением $d(n)$ и замечая, что $u(n) = \sum_{d|k, d \le V} \mu(d) = 0$ при $1 < d \le V$, легко переписать S_d в виде

$$S_d(f, N) = \sum_{\substack{U < m \le N/V \\ V < k \le N/m}} \Lambda(m) u(k) f(mk).$$

Представим себе, что нам для всех пар последовательностей x и y для всех $U \le M \le N/V$ удалось доказать неравенство

$$\left| \sum_{\substack{M \le m \le 2M \\ V < k \le N/m}} x_m y_k f(mk) \right| \le \Delta \left(\sum_{M < m \le 2M} |x_m|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \le N/M} |y_k|^2 \right)^{1/2}$$

При помощи двоичного разбиения получаем

$$S_d(f,N) \ll \Delta \ln N \max_{U \le M \le N/V} \left(\sum_{M \le m \le 2M} \Lambda(m)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \le N/M} u(k)^2 \right)^{1/2} \ll$$

3. Малые дуги

$$S_d(f,N) \ll \Delta \ln N \max_{U \le M \le N/V} \left(\sum_{M \le m \le 2M} \Lambda(m)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \le N/M} u(k)^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \Delta \ln N (M \ln M)^{1/2} (N/M \ln^3 N)^{1/2} \ll \Delta \sqrt{N} \ln^3 N.$$

3. Малые дуги

$$S_d(f,N) \ll \Delta \ln N \max_{U \le M \le N/V} \left(\sum_{M \le m \le 2M} \Lambda(m)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \le N/M} u(k)^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \Delta \ln N (M \ln M)^{1/2} (N/M \ln^3 N)^{1/2} \ll \Delta \sqrt{N} \ln^3 N.$$

Всё, что осталось — оценить Δ. Тривиальная оценка для Δ — $\sqrt{N}$ (неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным нужно применить дважды). Вместо этого давайте сразу воспользуемся неравенством Коши-Буняковского-Шварца, получим

$$S_d(f,N) \ll \Delta \ln N \max_{U \le M \le N/V} \left(\sum_{M \le m \le 2M} \Lambda(m)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \le N/M} u(k)^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \Delta \ln N (M \ln M)^{1/2} (N/M \ln^3 N)^{1/2} \ll \Delta \sqrt{N} \ln^3 N.$$

Всё, что осталось — оценить Δ. Тривиальная оценка для Δ — $\sqrt{N}$ (неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным нужно применить дважды). Вместо этого давайте сразу воспользуемся неравенством Коши-Буняковского-Шварца, получим

$$\left| \sum_{\substack{M \le m \le 2M \\ V < k \le N/m}} x_m y_k f(mk) \right| \le$$

$$\le \left(\sum_{M < m \le 2M} |x_m|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{M < m \le 2M} \left| \sum_{V < k \le N/m} y_k f(km) \right|^2 \right)^{1/2}$$

3. Малые дуги

Раскрывая скобки во внутренней сумме, выводим

3. Малые дуги

Раскрывая скобки во внутренней сумме, выводим

$$\sum_{M<m\leq 2M}\left|\sum_{V<k\leq N/m} y_k f(km)\right|^2 = \sum_{\substack{V<j\leq N/M\\ V<k\leq N/M}} y_j\overline{y_k}\sum_{\substack{M<m\leq 2M\\ m\leq N/j, m\leq N/k}} f(mj)\overline{f(mk)},$$

Раскрывая скобки во внутренней сумме, выводим

$$\sum_{M<m\le 2M}\left|\sum_{V<k\le N/m} y_k f(km)\right|^2=\sum_{\substack{V<j\le N/M\\ V<k\le N/M}} y_j\overline{y_k}\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ m\le N/j, m\le N/k}} f(mj)\overline{f(mk)},$$

откуда при помощи неравенства $|y_j\overline{y_k}|\le 0.5(|y_j|^2+|y_k|^2)$ легко получить

$$\Delta\ll\Delta(f,U,V):=\max_{\substack{U\le M\le N/V\\ V\le j\le N/M}}\left(\sum_{V<k\le N/M}\left|\sum_{\substack{M<m\le 2M\\ m\le N/k, m\le N/j}} f(mj)\overline{f(mk)}\right|\right)^{1/2}.$$

Соберем вместе полученные неравенства:

Лемма 4

Если $|f(n)| \leq 1$ *и* $1 \leq U, V$, $UV \leq N$, *то*

$$\sum_{n \leq N} \Lambda(n) f(n) \ll U + \ln N \sum_{t \leq UV} \max_{x} \left| \sum_{x \leq r \leq N/t} f(rt) \right| +$$

$$\sqrt{N} \Delta(f, U, V) \ln^3 N,$$

где $\Delta(f, U, V)$ — *параметр, определенный выше.*

3. Малые дуги

Соберем вместе полученные неравенства:

Лемма 4

Если $|f(n)| \leq 1$ *и* $1 \leq U, V$, $UV \leq N$, *то*

$$\sum_{n \leq N} \Lambda(n) f(n) \ll U + \ln N \sum_{t \leq UV} \max_x \left| \sum_{x \leq r \leq N/t} f(rt) \right| +$$
$$\sqrt{N} \Delta(f, U, V) \ln^3 N,$$

где $\Delta(f, U, V)$ *— параметр, определенный выше.*

Применим теперь получившийся результат к экспоненциальной сумме. Получится вот такое утверждение:

Теорема 2

Если для некоторого q *и* $(a,q)=1$ *выполнено неравенство*

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q^2},$$

то

$$T(\alpha)\ll\left(\frac{N}{\sqrt{q}}+N^{4/5}+\sqrt{Nq}\right)\ln^{7/2}N.$$

Теорема 2

Если для некоторого q и $(a,q)=1$ выполнено неравенство

$$\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q^2},$$

то

$$T(\alpha)\ll\left(\frac{N}{\sqrt{q}}+N^{4/5}+\sqrt{Nq}\right)\ln^{7/2}N.$$

Данная оценка становится нетривиальной при $q>\ln^7 N$ и остаётся нетривиальной вплоть до $q\asymp\frac{N}{\ln^7 N}$. Кроме того, при $N^{2/5}\ll q\ll N^{3/5}$ она принимает форму $T(\alpha)\ll N^{4/5}\ln^{7/2}N$.

Теорема 2

Если для некоторого q *и* $(a,q)=1$ *выполнено неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \le \frac{1}{q^2},$$

то

$$T(\alpha) \ll \left(\frac{N}{\sqrt{q}} + N^{4/5} + \sqrt{Nq}\right) \ln^{7/2} N.$$

Данная оценка становится нетривиальной при $q > \ln^7 N$ и остаётся нетривиальной вплоть до $q \asymp \frac{N}{\ln^7 N}$. Кроме того, при $N^{2/5} \ll q \ll N^{3/5}$ она принимает форму $T(\alpha) \ll N^{4/5} \ln^{7/2} N$. Доказательство опирается на стандартную оценку для линейной экспоненциальной суммы

$$\sum_{M \le n \le M+K} e^{2\pi i n\beta} \ll \min(K, ||\beta||^{-1}).$$

Согласно Лемме 4, для всех $UV \le N$ справедлива оценка

$$T(\alpha) \ll U + \sum_{t \le UV} \max_x \left| \sum_{x \le r \le N/t} e^{2\pi i r t \alpha} \right| + \sqrt{N} \ln^3 N \max_{\substack{U \le M \le N/V \\ V \le j \le N/M}} \Delta(f, U, V).$$

Согласно Лемме 4, для всех $UV \le N$ справедлива оценка

$$T(\alpha) \ll U + \sum_{t \le UV} \max_x \left| \sum_{x \le r \le N/t} e^{2\pi i r t \alpha} \right| + \sqrt{N} \ln^3 N \max_{\substack{U \le M \le N/V \\ V \le j \le N/M}} \Delta(f, U, V).$$

Оценим сначала "линейное" слагаемое:

$$\sum_{t \le UV} \max_x \left| \sum_{x \le r \le N/t} e^{2\pi i r t \alpha} \right| \ll \sum_{t \le UV} \min(N/t, ||t\alpha||^{-1}).$$

Согласно Лемме 4, для всех $UV \le N$ справедлива оценка

$$T(\alpha) \ll U + \sum_{t \le UV} \max_x \left| \sum_{x \le r \le N/t} e^{2\pi i r t \alpha} \right| + \sqrt{N} \ln^3 N \max_{\substack{U \le M \le N/V \\ V \le j \le N/M}} \Delta(f, U, V).$$

Оценим сначала "линейное" слагаемое:

$$\sum_{t \le UV} \max_x \left| \sum_{x \le r \le N/t} e^{2\pi i r t \alpha} \right| \ll \sum_{t \le UV} \min(N/t, ||t\alpha||^{-1}).$$

Введем обозначения $t = hq + r$, $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$. Разбивая сумму в соответствии со значением r, получим

$$\sum_{t \le UV} \min(N/t, ||t\alpha||^{-1}) \ll \sum_{0 \le h \le UV/q} \sum_{r=1}^{q} \min\left(\frac{N}{hq + r}, ||ra/q + hq\beta + r\beta||^{-1} \right)$$

3. Малые дуги

При $h = 0$ и $r < q$ сумма оценивается величиной $q\ln q$, в остальных случаях получим также $q\ln q$ и одно возможное исключение, которое оценим сверху как $\ll \frac{N}{q(h+1)}$, отсюда выводим оценку

$$\sum_{t\le UV}\min(N/t,||t\alpha||^{-1}) \ll \sum_{0\le h\le UV/q}(N/((h+1)q)+q\ln q) \ll$$

$$\ll \left(\frac{N}{q}+UV+q\right)\ln(qUV).$$

3. Малые дуги

При $h = 0$ и $r < q$ сумма оценивается величиной $q \ln q$, в остальных случаях получим также $q \ln q$ и одно возможное исключение, которое оценим сверху как $\ll \frac{N}{q(h+1)}$, отсюда выводим оценку

$$\sum_{t \leq UV} \min(N/t, ||t\alpha||^{-1}) \ll \sum_{0 \leq h \leq UV/q} (N/((h+1)q) + q \ln q) \ll$$

$$\ll \left(\frac{N}{q} + UV + q\right) \ln(qUV).$$

Последнее слагаемое оценивается аналогичным образом:

$$\Delta(f, U, V)^2 \ll \max_{\substack{U \leq M \leq N/V \\ V < d \leq N/M}} \left(\sum_{V < k \leq N/M} \min(M, ||(k-j)\alpha||^{-1} \right) \ll$$

$$\ll \max_{U \leq M \leq N/M} \left(M + \sum_{1 \leq m \leq N/M} \min\left(\frac{N}{m}, \frac{1}{||m\alpha||}\right)\right) \ll$$

$$\max_{U\le M\le N/V}(M+N/M+N/q+q)\ln(qN) \ll (N/V+N/U+N/q+q)\ln qN.$$

$$\max_{U\le M\le N/V}(M+N/M+N/q+q)\ln(qN) \ll (N/V+N/U+N/q+q)\ln qN.$$

Окончательно получаем

$$T(\alpha) \ll \left(UV + q + \frac{N}{\sqrt{U}} + \frac{N}{\sqrt{V}} + \frac{N}{\sqrt{q}} + \sqrt{Nq}\right)(\ln N)^{7/2}.$$

$$\max_{U\le M\le N/V}(M+N/M+N/q+q)\ln(qN) \ll (N/V+N/U+N/q+q)\ln qN.$$

Окончательно получаем

$$T(\alpha) \ll \left(UV+q+\frac{N}{\sqrt{U}}+\frac{N}{\sqrt{V}}+\frac{N}{\sqrt{q}}+\sqrt{Nq}\right)(\ln N)^{7/2}.$$

Выбор $U=V=N^{2/5}$ завершает доказательство. Теорема 2 даёт такую оценку для интеграла по малым дугам:

Следствие 2

$$\int_{E_2}|T(\alpha)|^3 d\alpha \ll N^2(\ln^{9/2-A/2}N+\ln^{9/2-B/2}N).$$

$$\max_{U\le M\le N/V}(M+N/M+N/q+q)\ln(qN) \ll (N/V+N/U+N/q+q)\ln qN.$$

Окончательно получаем

$$T(\alpha) \ll \left(UV+q+\frac{N}{\sqrt{U}}+\frac{N}{\sqrt{V}}+\frac{N}{\sqrt{q}}+\sqrt{Nq}\right)(\ln N)^{7/2}.$$

Выбор $U=V=N^{2/5}$ завершает доказательство. Теорема 2 даёт такую оценку для интеграла по малым дугам:

Следствие 2

$$\int_{E_2}|T(\alpha)|^3 d\alpha \ll N^2(\ln^{9/2-A/2}N+\ln^{9/2-B/2}N).$$

В самом деле, для любого $\alpha\in E_2$ имеем $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le\frac{1}{q^2}$ для некоторого $(\ln N)^B=\tau_0\le q\le\tau=N(\ln N)^{-A}$. Следовательно, из Теоремы 2 получаем

3. Малые дуги

$$T(\alpha) \ll (\frac{N}{\sqrt{q}}+N^{4/5}+\sqrt{Nq}) \ln^{7/2} N \ll N((\ln N)^{7/2-A/2}+(\ln N)^{7/2-B/2}).$$

3. Малые дуги

$$T(\alpha) \ll (\frac{N}{\sqrt{q}} + N^{4/5} + \sqrt{Nq}) \ln^{7/2} N \ll N((\ln N)^{7/2-A/2} + (\ln N)^{7/2-B/2}).$$

Таким образом,

$$\int_{E_2} |T(\alpha)|^3 d\alpha \ll \int_0^1 |T(\alpha)|^2 d\alpha \sup_{E_2} |T(\alpha)| \ll N^2 (\ln N)^{9/2-\min(A,B)/2},$$

3. Малые дуги

$$T(\alpha) \ll (\frac{N}{\sqrt{q}} + N^{4/5} + \sqrt{Nq}) \ln^{7/2} N \ll N((\ln N)^{7/2 - A/2} + (\ln N)^{7/2 - B/2}).$$

Таким образом,

$$\int_{E_2} |T(\alpha)|^3 d\alpha \ll \int_0^1 |T(\alpha)|^2 d\alpha \sup_{E_2} |T(\alpha)| \ll N^2 (\ln N)^{9/2 - \min(A,B)/2},$$

поскольку

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{n \le N} \Lambda(n)^2 \ll N \ln N.$$

3. Малые дуги

$$T(\alpha) \ll (\frac{N}{\sqrt{q}} + N^{4/5} + \sqrt{Nq}) \ln^{7/2} N \ll N((\ln N)^{7/2-A/2} + (\ln N)^{7/2-B/2}).$$

Таким образом,

$$\int_{E_2} |T(\alpha)|^3 d\alpha \ll \int_0^1 |T(\alpha)|^2 d\alpha \sup_{E_2} |T(\alpha)| \ll N^2 (\ln N)^{9/2-\min(A,B)/2},$$

поскольку

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{n \le N} \Lambda(n)^2 \ll N \ln N.$$

Следовательно, выбирая A и B произвольно большими, мы можем добиться в оценке на вклад от малых дуг понижения на произвольно большую степень логарифма.

4. Завершение доказательства

Таким образом, у нас получилась такая формула:

$$\rho(3,N) = \int_{E_1} + \int_{E_2} = \sum_{q \le \tau_0} \frac{N^2 \mu(q)}{2\varphi(q)^3} \sum_{(a,q)=1} e^{-2\pi i N a/q} +$$

$$O(\tau^2 \tau_0 \ln \ln^2 N) + O(N^2 (\ln N)^{9/2 - \min(A,B)/2}).$$

4. Завершение доказательства

Таким образом, у нас получилась такая формула:

$$\rho(3,N) = \int_{E_1} + \int_{E_2} = \sum_{q\le\tau_0} \frac{N^2\mu(q)}{2\varphi(q)^3} \sum_{(a,q)=1} e^{-2\pi i Na/q} +$$

$$O(\tau^2\tau_0 \ln\ln^2 N) + O(N^2(\ln N)^{9/2-\min(A,B)/2}).$$

Обозначим внутреннюю сумму через $c_q(N)$. Очевидно, $|c_q(N)| \le \varphi(q)$. Следовательно, можно заменить сумму по $q \le \tau_0$ на сумму по всем q, и остаток оценится величиной

$$O\left(N^2 \sum_{q>\tau_0} \frac{1}{\varphi(q)^2}\right) \ll \frac{N^2 \ln\ln\ln^2 N}{\tau_0}.$$

4. Завершение доказательства

Таким образом, у нас получилась такая формула:

$$\rho(3,N) = \int_{E_1} + \int_{E_2} = \sum_{q \le \tau_0} \frac{N^2 \mu(q)}{2\varphi(q)^3} \sum_{(a,q)=1} e^{-2\pi i N a/q} +$$

$$O(\tau^2 \tau_0 \ln\ln^2 N) + O(N^2 (\ln N)^{9/2 - \min(A,B)/2}).$$

Обозначим внутреннюю сумму через $c_q(N)$. Очевидно, $|c_q(N)| \le \varphi(q)$. Следовательно, можно заменить сумму по $q \le \tau_0$ на сумму по всем q, и остаток оценится величиной

$$O\left(N^2 \sum_{q > \tau_0} \frac{1}{\varphi(q)^2}\right) \ll \frac{N^2 \ln\ln\ln^2 N}{\tau_0}.$$

Собирая все оценки вместе, получим

$$\rho(3,N) = \frac{N^2 \mathfrak{S}}{2} + O(N^2 (\ln N)^{9/2 - \min(A,B)/2} + N^2 (\ln N)^{2A - B + o(1)}).$$

4. Завершение доказательства

Выбирая $B = 3A$ и $A \to +\infty$, получаем асимптотическую формулу, в которой остаточный член имеет вид $N^2(\ln N)^{-C}$ и C произвольно велико. При этом

$$\mathfrak{S} = \sum_q \frac{\mu(q)c_q(N)}{\varphi(q)^3}.$$

4. Завершение доказательства

Выбирая $B = 3A$ и $A \to +\infty$, получаем асимптотическую формулу, в которой остаточный член имеет вид $N^2(\ln N)^{-C}$ и C произвольно велико. При этом

$$\mathfrak{S} = \sum_q \frac{\mu(q)c_q(N)}{\varphi(q)^3}.$$

Чтобы доказать нижнюю оценку на эту сумму, заметим, что $c_q(N)$ мультипликативна по q.

4. Завершение доказательства

Выбирая $B = 3A$ и $A \to +\infty$, получаем асимптотическую формулу, в которой остаточный член имеет вид $N^2(\ln N)^{-C}$ и C произвольно велико. При этом

$$\mathfrak{S} = \sum_q \frac{\mu(q)c_q(N)}{\varphi(q)^3}.$$

Чтобы доказать нижнюю оценку на эту сумму, заметим, что $c_q(N)$ мультипликативна по q. В самом деле, если q_1 и q_2 взаимно просты, то любая дробь вида a/q_1q_2 представляется в виде $\frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2} + n$ для некоторого целого n, так что

$$c_{q_1q_2}(N) = \sum_{(a,q_1q_2)=1} e^{2\pi i N a/q_1q_2} =$$

$$= \sum_{(a_1,q_1)=(a_2,q_2)=1} e^{2\pi i N(a_1/q_1+a_2/q_2)} = c_{q_1}(N)c_{q_2}(N).$$

4. Завершение доказательства

Выбирая $B = 3A$ и $A \to +\infty$, получаем асимптотическую формулу, в которой остаточный член имеет вид $N^2(\ln N)^{-C}$ и C произвольно велико. При этом

$$\mathfrak{S} = \sum_q \frac{\mu(q)c_q(N)}{\varphi(q)^3}.$$

Чтобы доказать нижнюю оценку на эту сумму, заметим, что $c_q(N)$ мультипликативна по q. В самом деле, если q_1 и q_2 взаимно просты, то любая дробь вида a/q_1q_2 представляется в виде $\frac{a_1}{q_1} + \frac{a_2}{q_2} + n$ для некоторого целого n, так что

$$c_{q_1q_2}(N) = \sum_{(a,q_1q_2)=1} e^{2\pi i N a/q_1q_2} =$$

$$= \sum_{(a_1,q_1)=(a_2,q_2)=1} e^{2\pi i N(a_1/q_1+a_2/q_2)} = c_{q_1}(N)c_{q_2}(N).$$

Кроме того, для простых p имеем $c_p(N) = -1$, если $p \nmid N$ и $c_p(N) = p - 1$ если $p \mid N$. Следовательно,

4. Завершение доказательства

$$\mathfrak{S} = \sum_{q} \frac{\mu(q) c_q(N)}{\varphi(q)^3} = \prod_{p} \left(1 - \frac{c_p(N)}{(p-1)^3}\right) \geq 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \approx 1.32$$

4. Завершение доказательства

$$\mathfrak{S} = \sum_q \frac{\mu(q)c_q(N)}{\varphi(q)^3} = \prod_p \left(1 - \frac{c_p(N)}{(p-1)^3}\right) \geq 2\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \approx 1.32$$

Для нечётных N. Следовательно, $\rho(3,N) \gg N^2$ для больших нечётных N.

4. Завершение доказательства

$$\mathfrak{S} = \sum_q \frac{\mu(q)c_q(N)}{\varphi(q)^3} = \prod_p \left(1 - \frac{c_p(N)}{(p-1)^3}\right) \geq 2\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \approx 1.32$$

Для нечётных N. Следовательно, $\rho(3, N) \gg N^2$ для больших нечётных N. В частности, достаточно большие нечётные числа всегда являются суммами трёх простых чисел, поскольку

$$\sum_{\substack{a+b+c=N \\ c \text{ не простое}}} \Lambda(a)\Lambda(b)\Lambda(c) \ll$$

$$\ll \ln^3 N \#\{a+b = N-c, c = p^k, k > 1\} \ll N^{3/2}\ln^3 N.$$

Спасибо за внимание!