Распределение простых чисел
Листок 4

1. (1.5 б) Докажите, что при $y \geq 2$ выполнена оценка

$$\max_x (\pi(x+y) - \pi(x)) \ll \pi(y).$$

2.

а) (0.4 б) Пользуясь равенством

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \Gamma'(1) = -\gamma,$$

покажите, что при $\varepsilon \to 0$ справедливо соотношение

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\ln \varepsilon + \gamma + O(\varepsilon).$$

Указание: Проинтегрируйте по частям.

б) (0.3 б) Покажите, что для некоторой константы c при $x \to \infty$ выполнено

$$\sum_{p \leq x} -\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n \ln n} + o(1) = \ln \ln x + c + o(1).$$

в) (0.4 б) Пусть для $\psi-$функции Чебышёва выполнено равенство $\psi(t) = t + R(t)$. Докажите, что

$$c = \frac{1}{\ln 2} - \ln \ln 2 + \int_2^{+\infty} R(t) \left(\frac{1}{t \ln t} + \frac{1}{t \ln^2 t}\right) dt.$$

г) (0.7 б) Докажите, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\ln \zeta(s) = \int_s^{+\infty} \left(\frac{2^{1-u}}{u-1} + 2^{1-u}\right) du + \int_2^{+\infty} \left(\frac{s}{t^s \ln t} + \frac{1}{t^s \ln t}\right) R(t) dt$$

д) (0.7 б) Покажите, что при $s \to 1$

$$\ln \zeta(s) = -\ln(s-1) + O((s-1)).$$

Пользуясь предыдущими пунктами, заключите, что при $x \to +\infty$ справедливо соотношение

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma} + o(1)}{\ln x}.$$

3. Пусть $\omega(u)$ — функция Бухштаба, то есть $\omega(u) = \frac{1}{u}$ на отрезке $[1,2]$ и $(u\omega(u))' = \omega(u-1)$.

а) Пусть (0.4 б)

$$h(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} H(x) dx,$$

где

$$H(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t} dt - x\right).$$

Покажите, что при $u \to +\infty$ выполнено $uh(u) = 1 + o(1)$. Докажите, что

$$uh'(u-1) + h(u) = 0.$$

б) (0.3 б) Покажите, что $\omega(u)$ ограничена.

в) (0.3 б) Докажите, что при $u \geq 2$ функция

$$\int_{u-1}^{u} \omega(t)h(t)dt + u\omega(u)h(u-1)$$

постоянна.

г) (0.9 б) Устремив u к бесконечности, покажите, что предел $A = \lim\limits_{u\to+\infty} \omega(u)$ существует. Покажите, что

$$A = h(0) = \lim_{u\to 0} uh'(u-1) = e^{-\gamma}.$$

д) (0.7 б) Докажите, что

$$\int_{u-1}^{u} (\omega(t) - e^{-\gamma})h(t)dt + u(\omega(u) - e^{-\gamma})h(u) = 0$$

для всех u. Выведите из этого, что на любом отрезке $[u-1, u]$ функция $\omega(u) - e^{-\gamma}$ меняет знак.

4.

а) (0.8 б) Воспользовавшись разложением по нулям

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\ln(t+2))$$

и границей нулей для дзета-функции, докажите, что для достаточно малого $c > 0$ при $|\sigma - 1| \leq \frac{c}{\ln(t+2)}$ выполнено

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll \sqrt{t}.$$

б) (0.9 б) Пользуясь формулой Перрона

$$\sum_{n\leq x}\mu(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1+c_1/\ln x-iT}^{1+c_1/\ln x+iT}\frac{x^s}{s\zeta(s)}ds++O\left(\frac{x\ln x}{T}\right)$$

и пунктом а) докажите, что

$$M(x)=\sum_{n\leq x}\mu(n)=O(xe^{-A\sqrt{\ln x}})$$

для некоторого $A>0$.