Комбинаторные решёта, теорема Бруна

Александр Калмынин

Распределение простых чисел
9 декабря 2020

1. Чистое решето

В позапрошлой лекции мы сделали наблюдение, согласно которому если в процессе включения-исключения остановиться после r операций включения-исключения, то получится верхняя или нижняя оценка для интересующей нас величины $\mathcal{S}(\mathcal{A}, z)$, в зависимости от чётности r.

1. Чистое решето

В позапрошлой лекции мы сделали наблюдение, согласно которому если в процессе включения-исключения остановиться после r операций включения-исключения, то получится верхняя или нижняя оценка для интересующей нас величины $\mathcal{S}(\mathcal{A}, z)$, в зависимости от чётности r. Сегодня мы применим это рассуждение, а также дадим его вариацию, позволяющую немного продвинуться в таких вопросах, как изучение простых чисел-близнецов.

1. Чистое решето

В позапрошлой лекции мы сделали наблюдение, согласно которому если в процессе включения-исключения остановиться после r операций включения-исключения, то получится верхняя или нижняя оценка для интересующей нас величины $\mathcal{S}(\mathcal{A}, z)$, в зависимости от чётности r. Сегодня мы применим это рассуждение, а также дадим его вариацию, позволяющую немного продвинуться в таких вопросах, как изучение простых чисел-близнецов. Начнём с "чистого решета", которое использует лишь вышенаписанное соображение чётности.

Теорема 1

Пусть $|\mathcal{A}_d| = Xg(d) + r_d(\mathcal{A})$ *для всех* $d \mid P(z)$, *где* $X > 0$ *и* $g(d)$ *— мультипликативная функция. Пусть также для некотрого* $\kappa > 0$ *выполнено*

Теорема 1

Пусть $|\mathcal{A}_d| = Xg(d) + r_d(\mathcal{A})$ *для всех* $d \mid P(z)$, *где* $X > 0$ *и* $g(d)$ — *мультипликативная функция. Пусть также для некотрого* $\kappa > 0$ *выполнено*

$$\sum_{p \le z} g(p) = \kappa \ln\ln z + O(1),$$

Теорема 1

Пусть $|\mathcal{A}_d| = Xg(d) + r_d(\mathcal{A})$ *для всех* $d \mid P(z)$, *где* $X > 0$ *и* $g(d)$ — *мультипликативная функция. Пусть также для некотрого* $\kappa > 0$ *выполнено*

$$\sum_{p \le z} g(p) = \kappa \ln\ln z + O(1),$$

тогда

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, z) = XV(z)(1 + O((\ln z)^{-2\kappa}) + O\left(z^{5\kappa \ln\ln z} E(z^{5\kappa \ln\ln z})\right),$$

Теорема 1

Пусть $|\mathcal{A}_d| = Xg(d) + r_d(\mathcal{A})$ *для всех* $d \mid P(z)$, *где* $X > 0$ *и* $g(d)$ *— мультипликативная функция. Пусть также для некотрого* $\kappa > 0$ *выполнено*

$$\sum_{p \le z} g(p) = \kappa \ln\ln z + O(1),$$

тогда

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, z) = XV(z)(1 + O((\ln z)^{-2\kappa}) + O\left(z^{5\kappa \ln\ln z} E(z^{5\kappa \ln\ln z})\right),$$

где

$$V(z) = \prod_{p \le z} (1 - g(p)) \text{ и } E(y) = \max_{n \le y} |r_n(\mathcal{A})|.$$

1. Чистое решето

Теорема 1

Пусть $|\mathcal{A}_d| = Xg(d) + r_d(\mathcal{A})$ *для всех* $d \mid P(z)$, *где* $X > 0$ *и* $g(d)$ *— мультипликативная функция. Пусть также для некотрого* $\kappa > 0$ *выполнено*

$$\sum_{p \le z} g(p) = \kappa \ln\ln z + O(1),$$

тогда

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, z) = XV(z)(1 + O((\ln z)^{-2\kappa}) + O\left(z^{5\kappa \ln\ln z} E(z^{5\kappa \ln\ln z})\right),$$

где

$$V(z) = \prod_{p \le z}(1 - g(p)) \text{ и } E(y) = \max_{n \le y} |r_n(\mathcal{A})|.$$

Для доказательства этого результата, возьмём $m = [2.49\kappa \ln\ln z]$ и сделаем $2m$ и $2m+1$ шагов включений-исключений соответственно.

Получим соотношение

$$\sum_{\substack{\omega(d)\le 2m+1\\ d|P(z)}} \mu(d)|\mathcal{A}_d| \le \mathcal{S}(\mathcal{A}, z) \le \sum_{\substack{\omega(d)\le 2m\\ d|P(z)}} \mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

Получим соотношение

$$\sum_{\substack{\omega(d)\le 2m+1\\ d|P(z)}} \mu(d)|\mathcal{A}_d| \le \mathcal{S}(\mathcal{A},z) \le \sum_{\substack{\omega(d)\le 2m\\ d|P(z)}} \mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

Заменяя $\mathcal{A}_d$ на приближенные значения и отбрасывая остаточные члены, получаем

$$X\sum_{\substack{\omega(d)\le 2m+1\\ d|P(z)}} \mu(d)g(d) + O(z^{5\kappa\ln\ln z}E(z^{5\kappa\ln\ln z})) \le \mathcal{S}(\mathcal{A},z) \le$$

$$X\sum_{\substack{\omega(d)\le 2m\\ d|P(z)}} \mu(d)g(d) + O(z^{5\kappa\ln\ln z}E(z^{5\kappa\ln\ln z})),$$

Получим соотношение

$$\sum_{\substack{\omega(d)\le 2m+1\\ d|P(z)}} \mu(d)|\mathcal{A}_d| \le \mathcal{S}(\mathcal{A},z) \le \sum_{\substack{\omega(d)\le 2m\\ d|P(z)}} \mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

Заменяя $\mathcal{A}_d$ на приближенные значения и отбрасывая остаточные члены, получаем

$$X \sum_{\substack{\omega(d)\le 2m+1\\ d|P(z)}} \mu(d)g(d) + O(z^{5\kappa \ln\ln z} E(z^{5\kappa \ln\ln z})) \le \mathcal{S}(\mathcal{A},z) \le$$

$$X \sum_{\substack{\omega(d)\le 2m\\ d|P(z)}} \mu(d)g(d) + O(z^{5\kappa \ln\ln z} E(z^{5\kappa \ln\ln z})),$$

поскольку $2m+1 \le 5\kappa \ln\ln z$ для больших z.

1. Чистое решето

Далее, заменяя суммы слева и справа полной суммой, получаем для любого $k \geq 2m$

$$\sum_{\substack{\omega(d)\leq k \\ d|P(z)}} \mu(d)g(d) = V(z) + O\left(\sum_{n\geq 2m} \frac{1}{n!}\left(\sum_{p\leq z} g(p)\right)^n\right)$$

Далее, заменяя суммы слева и справа полной суммой, получаем для любого $k \geq 2m$

$$\sum_{\substack{\omega(d)\leq k\\ d|P(z)}} \mu(d)g(d) = V(z) + O\left(\sum_{n\geq 2m}\frac{1}{n!}\left(\sum_{p\leq z} g(p)\right)^n\right)$$

Далее, так как $2m$ превышает сумму в скобках хотя бы в два раза для больших z, то каждое следующее слагаемое хотя бы в два раза меньше предыдущего и мы получаем равенство

$$\sum_{\substack{\omega(d)\leq k\\ d|P(z)}} \mu(d)g(d) = V(z) + O\left(\frac{1}{(2m)!}\left(\sum_{p\leq z} g(p)\right)^{2m}\right)$$

Заметив, что

$$\frac{(2m)^{2m}}{(2m)!} \leq e^{2m},$$

получим

$$\frac{1}{(2m)!}\left(\sum_{p\leq z} g(p)\right)^{2m} \leq \left(\frac{e\kappa}{4.98\kappa} + O((\ln\ln z)^{-1})\right)^{2m} \ll \frac{1}{(\ln z)^{3\kappa}}$$

Заметив, что
$$\frac{(2m)^{2m}}{(2m)!} \le e^{2m},$$
получим
$$\frac{1}{(2m)!}\left(\sum_{p\le z} g(p)\right)^{2m} \le \left(\frac{e\kappa}{4.98\kappa} + O((\ln\ln z)^{-1})\right)^{2m} \ll \frac{1}{(\ln z)^{3\kappa}}$$
Отсюда и получаем требуемое, поскольку
$$V(z) = \exp\left(-\sum_{p\le z} g(p) + O(1)\right) = \exp(-\kappa\ln\ln z + O(1)) \asymp \frac{1}{(\ln z)^{\kappa}}.$$

1. Чистое решето

Воспользуемся Теоремой 1 для того, чтобы оценить число $p \le x$ таких, что $p+2$ — простое. В этом случае $\mathcal{A} = \{n(n+2) : n \le x\}$ и

$$|\mathcal{A}_d| = xg(d) + O(1),$$

Воспользуемся Теоремой 1 для того, чтобы оценить число $p \le x$ таких, что $p+2$ — простое. В этом случае $\mathcal{A} = \{n(n+2) : n \le x\}$ и

$$|\mathcal{A}_d| = xg(d) + O(1),$$

где $g(2) = \frac{1}{2}$ и $g(p) = \frac{2}{p}$ для $p > 2$. Следовательно, в этой ситуации

$$\sum_{p \le z} g(p) = 2 \ln\ln z + O(1),$$

Воспользуемся Теоремой 1 для того, чтобы оценить число $p \leq x$ таких, что $p+2$ — простое. В этом случае $\mathcal{A} = \{n(n+2) : n \leq x\}$ и

$$|\mathcal{A}_d| = xg(d) + O(1),$$

где $g(2) = \frac{1}{2}$ и $g(p) = \frac{2}{p}$ для $p > 2$. Следовательно, в этой ситуации

$$\sum_{p \leq z} g(p) = 2 \ln \ln z + O(1),$$

так что $\kappa = 2$ и $E(y) \ll 1$. Выбирая $z = \exp\left(\frac{\ln x}{11 \ln \ln x}\right)$, получаем из Теоремы 1

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, z) = XV(z) + O(z^{5\kappa \ln \ln z}) = xV(z) + O(x^{10/11}) \asymp \frac{x}{(\ln z)^2} \asymp \frac{x(\ln \ln x)^2}{\ln^2 x}.$$

Таким образом,

Теорема 2

Для числа $\pi_2(x)$ *простых* $p \leq x$ *таких, что* $p+2$ *— также простое, выполнено соотношение*

$$\pi_2(x) \ll \frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}.$$

Таким образом,

Теорема 2

Для числа $\pi_2(x)$ простых $p \le x$ таких, что $p+2$ — также простое, выполнено соотношение

$$\pi_2(x) \ll \frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}.$$

В частности, существует число

$$B = \sum_{p \text{ и } p+2 \text{ просты}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) < \infty.$$

Таким образом,

Теорема 2

Для числа $\pi_2(x)$ простых $p \le x$ таких, что $p+2$ — также простое, выполнено соотношение

$$\pi_2(x) \ll \frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}.$$

В частности, существует число

$$B = \sum_{p \text{ и } p+2 \text{ просты}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) < \infty.$$

Число B называется константой Бруна. Вычисляя простые до 10^{16}, удалось найти

$$B \approx 1.90216$$

Будем говорить, что последовательности $\lambda_d^{\pm}$ верхнее и нижнее решето соответственно, если $\lambda_1^{\pm} = 1$ и при $m > 1$ выполнены соотношения

$$\sum_{d|m} \lambda_d^{-} \leq 0 \leq \sum_{d|m} \lambda_d^{+}.$$

2. Комбинаторные решёта

Будем говорить, что последовательности $\lambda_d^{\pm}$ верхнее и нижнее решето соответственно, если $\lambda_1^{\pm} = 1$ и при $m > 1$ выполнены соотношения

$$\sum_{d|m} \lambda_d^- \leq 0 \leq \sum_{d|m} \lambda_d^+.$$

Решето называется комбинаторным, если последовательность $\lambda_d^{\pm}$ получается ограничением функции Мёбиуса на какое-нибудь множество $\mathcal{D}^{\pm} \subset \mathbb{N}$.

Будем говорить, что последовательности $\lambda_d^{\pm}$ верхнее и нижнее решето соответственно, если $\lambda_1^{\pm} = 1$ и при $m > 1$ выполнены соотношения

$$\sum_{d|m} \lambda_d^{-} \le 0 \le \sum_{d|m} \lambda_d^{+}.$$

Решето называется комбинаторным, если последовательность $\lambda_d^{\pm}$ получается ограничением функции Мёбиуса на какое-нибудь множество $\mathcal{D}^{\pm} \subset \mathbb{N}$. Следующая теорема позволяет строить многопараметрические семейства комбинаторных решёт:

Теорема 3

Пусть y_m — любая последовательность параметров. Тогда ограничения функции Мёбиуса на множества

$$\mathcal{D}^{+} = \{d = p_1 \dots p_l : p_m < y_m \text{ для нечётных } m \text{ и } p_{i+1} < p_i\}$$

и

$$\mathcal{D}^{-} = \{d = p_1 \dots p_l : p_m < y_m \text{ для чётных } m \text{ и } p_{i+1} < p_u\}$$

задают верхнее и нижнее решёта соответственно.

2. Комбинаторные решёта

Теорема 3

Пусть y_m — любая последовательность параметров. Тогда ограничения функции Мёбиуса на множества

$$\mathcal{D}^+ = \{d = p_1 \dots p_l : p_m < y_m \text{ для нечётных } m \text{ и } p_{i+1} < p_i\}$$

и

$$\mathcal{D}^- = \{d = p_1 \dots p_l : p_m < y_m \text{ для чётных } m \text{ и } p_{i+1} < p_u\}$$

задают верхнее и нижнее решёта соответственно.

Вместо прямого доказательства Теоремы 3, мы сразу покажем, что для любого P и любого $\mathcal{A}$ выполнено

$$\sum_{\substack{d|P \\ d\in\mathcal{D}^-}} \mu(d)|\mathcal{A}_d| = \mathcal{S}^-(\mathcal{A}, P) \le \mathcal{S}(\mathcal{A}, P) \le \mathcal{S}^+(\mathcal{A}, P) = \sum_{\substack{d|P \\ d\in\mathcal{D}^+}} \mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

Теорема 3

Пусть y_m — любая последовательность параметров. Тогда ограничения функции Мёбиуса на множества

$$\mathcal{D}^+ = \{d = p_1 \dots p_l : p_m < y_m \text{ для нечётных } m \text{ и } p_{i+1} < p_i\}$$

и

$$\mathcal{D}^- = \{d = p_1 \dots p_l : p_m < y_m \text{ для чётных } m \text{ и } p_{i+1} < p_u\}$$

задают верхнее и нижнее решёта соответственно.

Вместо прямого доказательства Теоремы 3, мы сразу покажем, что для любого P и любого $\mathcal{A}$ выполнено

$$\sum_{\substack{d|P \\ d\in\mathcal{D}^-}} \mu(d)|\mathcal{A}_d| = \mathcal{S}^-(\mathcal{A}, P) \leq \mathcal{S}(\mathcal{A}, P) \leq \mathcal{S}^+(\mathcal{A}, P) = \sum_{\substack{d|P \\ d\in\mathcal{D}^+}} \mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

Такой переход допустим, поскольку Теорема 3 есть частный случай этого неравенства для $\mathcal{A} = \{P\}$.

Нужное нам неравенство получается аналогично неравенству Бруна из первой части при помощи следующей леммы:

Лемма 1 (Тождество Бухштаба)

Пусть $P_z = \prod_{\substack{p<z \\ p|P}} p$. *Тогда*

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, P) = |\mathcal{A}| - \sum_{p|P} \mathcal{S}(\mathcal{A}_p, P_p).$$

Нужное нам неравенство получается аналогично неравенству Бруна из первой части при помощи следующей леммы:

Лемма 1 (Тождество Бухштаба)

Пусть $P_z = \prod\limits_{\substack{p<z\\ p|P}} p$. *Тогда*

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, P) = |\mathcal{A}| - \sum_{p|P} \mathcal{S}(\mathcal{A}_p, P_p).$$

В самом деле, если $a \in \mathcal{A}$ и $(a, P) \neq 1$, то есть a не даёт вклада в $\mathcal{S}(\mathcal{A}, P)$, то существует наименьшее $p \mid P$ такое, что $a \in \mathcal{A}_p$. В этом и только этом случае имеем также $(a, P_p) = 1$.

Нужное нам неравенство получается аналогично неравенству Бруна из первой части при помощи следующей леммы:

Лемма 1 (Тождество Бухштаба)

Пусть $P_z = \prod_{\substack{p<z \\ p|P}} p$. *Тогда*

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, P) = |\mathcal{A}| - \sum_{p|P} \mathcal{S}(\mathcal{A}_p, P_p).$$

В самом деле, если $a \in \mathcal{A}$ и $(a, P) \neq 1$, то есть a не даёт вклада в $\mathcal{S}(\mathcal{A}, P)$, то существует наименьшее $p \mid P$ такое, что $a \in \mathcal{A}_p$. В этом и только этом случае имеем также $(a, P_p) = 1$.

Чтобы вывести Теорему 3 из Леммы 1, будем итеративно применять тождество Бухштаба. Докажем верхнюю оценку: согласно тождеству Бухштаба,

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, P) = |\mathcal{A}| - \sum_{p|P} \mathcal{S}(\mathcal{A}_p, P_p).$$

Выбросим из суммы $p \geq y_1$, тем самым не уменьшив её, а затем применим к каждому из оставшихся слагаемых тождество Бухштаба:

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, P) \leq |\mathcal{A}| - \sum_{p_1 | P, p_1 < y_1} |\mathcal{A}_{p_1}| + \sum_{p_2 < p_1 < y_1, p_i | P} \mathcal{S}(\mathcal{A}_{p_1 p_2}, P_{p_2}).$$

2. Комбинаторные решёта

Выбросим из суммы $p \geq y_1$, тем самым не уменьшив её, а затем применим к каждому из оставшихся слагаемых тождество Бухштаба:

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, P) \leq |\mathcal{A}| - \sum_{p_1 | P, p_1 < y_1} |\mathcal{A}_{p_1}| + \sum_{p_2 < p_1 < y_1, p_i | P} \mathcal{S}(\mathcal{A}_{p_1 p_2}, P_{p_2}).$$

Из слагаемых со знаком $+$ мы ничего выбрасывать не будем, а вместо этого применим наше тождество ещё раз. Получим

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, P) \leq |\mathcal{A}| - \sum_{p_1 | P, p_1 < y_1} |\mathcal{A}_{p_1}| + \sum_{p_2 < p_1 < y_1, p_i | P} |\mathcal{A}_{p_1 p_2}|$$

$$- \sum_{p_3 < p_2 < p_1 < y_1, p_i | P} \mathcal{S}(\mathcal{A}_{p_1 p_2 p_3}, P_{p_3}).$$

2. Комбинаторные решёта

Выбросим из суммы $p \geq y_1$, тем самым не уменьшив её, а затем применим к каждому из оставшихся слагаемых тождество Бухштаба:

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, P) \leq |\mathcal{A}| - \sum_{p_1|P, p_1<y_1} |\mathcal{A}_{p_1}| + \sum_{p_2<p_1<y_1, p_i|P} \mathcal{S}(\mathcal{A}_{p_1p_2}, P_{p_2}).$$

Из слагаемых со знаком $+$ мы ничего выбрасывать не будем, а вместо этого применим наше тождество ещё раз. Получим

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, P) \leq |\mathcal{A}| - \sum_{p_1|P, p_1<y_1} |\mathcal{A}_{p_1}| + \sum_{p_2<p_1<y_1, p_i|P} |\mathcal{A}_{p_1p_2}|$$

$$- \sum_{p_3<p_2<p_1<y_1, p_i|P} \mathcal{S}(\mathcal{A}_{p_1p_2p_3}, P_{p_3}).$$

Теперь можно избавиться от слагаемых с $p_3 \geq y_3$. Продолжая ту же процедуру, получаем требуемое соотношение. Для доказательства нижней оценки нужно действовать аналогично, но выкидывать слагаемые со знаком плюс.

Пользуясь Теоремой 3, мы выведем такой результат:

Теорема 4

Пусть $\mathcal{A}$ *таково, что*

$$|\mathcal{A}_d| = Xg(d) + r_d(\mathcal{A}),$$

причём

$$\sum_{p\le y} g(p) = \kappa \ln\ln y + C + o(1) \text{ и } r_d(\mathcal{A}) \ll d^{o(1)}.$$

Тогда при $\beta > \exp\left(-\frac{0.157}{\kappa}\right)$ *и* $z = x^{c(\beta)}$, $c(\beta) < \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$ *выполнено соотношение* $\mathcal{S}(\mathcal{A}, z) \asymp XV(z)$.

2. Комбинаторные решёта

Пользуясь Теоремой 3, мы выведем такой результат:

Теорема 4

Пусть $\mathcal{A}$ таково, что

$$|\mathcal{A}_d| = Xg(d) + r_d(\mathcal{A}),$$

причём

$$\sum_{p\leq y} g(p) = \kappa \ln\ln y + C + o(1) \text{ и } r_d(\mathcal{A}) \ll d^{o(1)}.$$

Тогда при $\beta > \exp\left(-\frac{0.157}{\kappa}\right)$ *и* $z = x^{c(\beta)}$, $c(\beta) < \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$ *выполнено соотношение* $\mathcal{S}(\mathcal{A}, z) \asymp XV(z)$.

Как можно заметить, в решете Эратосфена ограничение на z было логарифмично по x, в чистом комбинаторном решете ограничение было $z = x^{O(1/\ln\ln x)}$, здесь же нам удается добиться расширения диапазона допустимых z до некоторой небольшой постоянной степени x.

Для доказательства воспользуемся Теоремой 3 и подставим в неё нашу информацию об $\mathcal{A}$. Получим

$$\mathcal{S}^{\pm}(\mathcal{A},z)=\sum_{\substack{d|P(z)\\ d\in\mathcal{D}^{\pm}}}\mu(d)(Xg(d)+r_d(\mathcal{A}))=XV^{\pm}(z)+O(|\mathcal{D}_z^{\pm}|^{1+o(1)})$$

в качестве верхней и нижней границы соответственно.

Для доказательства воспользуемся Теоремой 3 и подставим в неё нашу информацию об $\mathcal{A}$. Получим

$$\mathcal{S}^{\pm}(\mathcal{A}, z) = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d\in\mathcal{D}^{\pm}}} \mu(d)(Xg(d) + r_d(\mathcal{A})) = XV^{\pm}(z) + O(|\mathcal{D}_z^{\pm}|^{1+o(1)})$$

в качестве верхней и нижней границы соответственно. Далее нам нужно выбрать параметры. Мы будем пользоваться одним из наиболее простых выборов, а именно положим $y_m = z^{\beta^m}$. Оценим тогда $\mathcal{D}_z^{\pm}$.

Для доказательства воспользуемся Теоремой 3 и подставим в неё нашу информацию об $\mathcal{A}$. Получим

$$\mathcal{S}^{\pm}(\mathcal{A}, z) = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d\in\mathcal{D}^{\pm}}} \mu(d)(Xg(d) + r_d(\mathcal{A})) = XV^{\pm}(z) + O(|\mathcal{D}_z^{\pm}|^{1+o(1)})$$

в качестве верхней и нижней границы соответственно. Далее нам нужно выбрать параметры. Мы будем пользоваться одним из наиболее простых выборов, а именно положим $y_m = z^{\beta^m}$. Оценим тогда $\mathcal{D}_z^{\pm}$. Для наибольшего простого делителя есть не более чем z вариантов, не более чем z^{β^2} для второго и третьего, не более чем z^{β^4} для четвертого и пятого и так далее. Следовательно, остаточный член оценивается так

$$|\mathcal{D}_z^{\pm}|^{1+o(1)} \leq z^{1+2\beta^2+2\beta^4+\dots} = x^{c(\beta)(1+\beta^2)/(1-\beta^2)+o(1)} = x^{1-\varepsilon}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

2. Комбинаторные решёта

Далее, из доказательства Теоремы 3 можно восстановить структуру разностей $V^+ - V$ и $V - V^-$. А именно,

$$V(z) = V^+(z) - \sum_{n \text{ нечётно}} V_n(z) = V^-(z) + \sum_{n \text{ чётно}} V_n(z),$$

Далее, из доказательства Теоремы 3 можно восстановить структуру разностей $V^+ - V$ и $V - V^-$. А именно,

$$V(z) = V^+(z) - \sum_{n \text{ нечётно}} V_n(z) = V^-(z) + \sum_{n \text{ чётно}} V_n(z),$$

где

$$V_n(z) = \sum_{\substack{y_n \le p_n < \ldots < p_1 \\ p_m < y_m, m < n, m \equiv n \pmod 2}} g(p_1 \ldots p_n) V(p_n).$$

Далее, из доказательства Теоремы 3 можно восстановить структуру разностей $V^+ - V$ и $V - V^-$. А именно,

$$V(z) = V^+(z) - \sum_{n \text{ нечётно}} V_n(z) = V^-(z) + \sum_{n \text{ чётно}} V_n(z),$$

где

$$V_n(z) = \sum_{\substack{y_n \le p_n < \ldots < p_1 \\ p_m < y_m, m < n, m \equiv n \pmod 2}} g(p_1 \ldots p_n) V(p_n).$$

Так как $V(z)$ — невозрастающая функция, то

$$V_n(z) \le V(y_n) \sum_{y_n \le p_n < \ldots < p_1} g(p_1 \ldots p_n) \le V(y_n) \left(\sum_{y_n \le p < z} g(p) \right)^n \frac{1}{n!}.$$

2. Комбинаторные решёта

Далее,

$$\frac{V(y_n)}{V(z)} = \exp\left(\sum_{y_n \le p < z} g(p) + o(1)\right) = (1+o(1))\left(\frac{\ln z}{\ln y_n}\right)^{\kappa} = \beta^{-\kappa n}(1+o(1)).$$

Далее,

$$\frac{V(y_n)}{V(z)} = \exp\left(\sum_{y_n \le p < z} g(p) + o(1)\right) = (1+o(1))\left(\frac{\ln z}{\ln y_n}\right)^{\kappa} = \beta^{-\kappa n}(1+o(1)).$$

Следовательно,

$$V_n(z) \le V(z)(\beta^{-\kappa n} + o(1))\left(\sum_{y_n \le p < z} g(p)\right)^n \frac{1}{n!}$$

Далее,

$$\frac{V(y_n)}{V(z)} = \exp\left(\sum_{y_n\le p<z} g(p) + o(1)\right) = (1+o(1))\left(\frac{\ln z}{\ln y_n}\right)^{\kappa} = \beta^{-\kappa n}(1+o(1)).$$

Следовательно,

$$V_n(z) \le V(z)(\beta^{-\kappa n} + o(1))\left(\sum_{y_n\le p<z} g(p)\right)^n \frac{1}{n!}$$

Далее,

$$\sum_{y_n\le p<z} g(p) = \kappa(\ln\ln z - \ln\ln y_n) + o(1) = -n\kappa\ln\beta + o(1),$$

откуда получаем

$$V_n(z) \le V(z)(1+o(1))\frac{(-n\kappa\beta^{-\kappa}\ln\beta)^n}{n!} \le (1+o(1))V(z)(-\beta^{-\kappa}\kappa e\ln\beta)^n.$$

Если $\beta > \exp\left(-\frac{0.157}{\kappa}\right)$, то $-\kappa \ln \beta < 0.157$, так что

$$(-e\kappa \ln \beta \exp(-\kappa \ln \beta)) \le 0.157 e^{1.157} \le 0.4994.$$

Если $\beta > \exp\left(-\frac{0.157}{\kappa}\right)$, то $-\kappa \ln\beta < 0.157$, так что

$$(-e\kappa\ln\beta\exp(-\kappa\ln\beta)) \le 0.157e^{1.157} \le 0.4994.$$

Отсюда получаем

$$V^{+}(z) - V^{-}(z) \le V(z)(1+o(1))\frac{0.4994}{1-0.4994} \le 0.998V(z)$$

и

$$V^{-}(z) \ge 0.002V(z),$$

Если $\beta > \exp\left(-\frac{0.157}{\kappa}\right)$, то $-\kappa \ln \beta < 0.157$, так что

$$(-e\kappa \ln \beta \exp(-\kappa \ln \beta)) \leq 0.157 e^{1.157} \leq 0.4994.$$

Отсюда получаем

$$V^+(z) - V^-(z) \leq V(z)(1+o(1))\frac{0.4994}{1-0.4994} \leq 0.998 V(z)$$

и

$$V^-(z) \geq 0.002 V(z),$$

откуда и выводим

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, z) \asymp X V(z).$$

Отсюда немедленно получаются такие результаты:

Теорема 5

Существует бесконечно много таких n, *что числа* n *и* $n+2$ *имеют не более 12 простых делителей с учётом кратности.*

Отсюда немедленно получаются такие результаты:

Теорема 5

Существует бесконечно много таких n, что числа n и $n+2$ имеют не более 12 простых делителей с учётом кратности.

Теорема 6

Существует бесконечно много таких n, что n^2+1 имеет не более 12 простых делителей с учётом кратности.

Отсюда немедленно получаются такие результаты:

Теорема 5

Существует бесконечно много таких n, что числа n и $n+2$ имеют не более 12 простых делителей с учётом кратности.

Теорема 6

Существует бесконечно много таких n, что n^2+1 имеет не более 12 простых делителей с учётом кратности.

Для Теоремы 5 положим $\mathcal{A} = \{n(n+2), n \leq x\}$, тогда $g(2) = 1/2$ и $g(p) = \frac{2}{p}$ для нечётных p. Следовательно, имеем $\kappa = 2$ и $X = x$, как и ранее. Значит, выбирая $\beta > \exp(-0.157/2) \approx 0.9245$ получим

Отсюда немедленно получаются такие результаты:

Теорема 5

Существует бесконечно много таких n, что числа n и $n+2$ имеют не более 12 простых делителей с учётом кратности.

Теорема 6

Существует бесконечно много таких n, что n^2+1 имеет не более 12 простых делителей с учётом кратности.

Для Теоремы 5 положим $\mathcal{A} = \{n(n+2), n \leq x\}$, тогда $g(2) = 1/2$ и $g(p) = \frac{2}{p}$ для нечётных p. Следовательно, имеем $\varkappa = 2$ и $X = x$, как и ранее. Значит, выбирая $\beta > \exp(-0.157/2) \approx 0.9245$ получим

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}, z) \asymp XV(z) \asymp \frac{x}{\ln^2 x}$$

при $z < x^{c(\beta)} = x^{1/12.765\ldots}$.

Для Теоремы 6 следует выбрать $\mathcal{A} = \{n^2+1, n \le x\}$. Тогда $g(2) = 1/2$ и $g(p) = (1 + (-1)^{(p-1)/2)})/p$ для нечётных p. Следовательно, размерность κ в данном случае равна 1, так как

$$\sum_{p \le y} \frac{1 + (-1)^{(p-1)/2}}{p} = \ln\ln y + c + o(1).$$

2. Комбинаторные решёта

Для Теоремы 6 следует выбрать $\mathcal{A} = \{n^2+1, n \le x\}$. Тогда $g(2) = 1/2$ и $g(p) = (1 + (-1)^{(p-1)/2)})/p$ для нечётных p. Следовательно, размерность κ в данном случае равна 1, так как

$$\sum_{p \le y} \frac{1 + (-1)^{(p-1)/2}}{p} = \ln \ln y + c + o(1).$$

В данном случае нужно выбрать $\beta > \exp(-0.157) \approx 0.8547$, так что подойдёт

$$z < x^{c(\beta)} = x^{1/6.4216\ldots}$$

Здесь мы приведем набросок доказательства следующей теоремы Н. П. Романова:

Теорема 7

Множество чисел, представимых в виде суммы простого числа и степени двойки, имеет положительную плотность.

Здесь мы приведем набросок доказательства следующей теоремы Н. П. Романова:

Теорема 7

Множество чисел, представимых в виде суммы простого числа и степени двойки, имеет положительную плотность.

Для доказательства рассмотрим $f(n) = \#\{p, k : n = p + 2^k\}$. Покажем, что

$$\sum_{n \le x} f(n)^2 \ll x.$$

3. Теорема Романова

Здесь мы приведем набросок доказательства следующей теоремы Н. П. Романова:

Теорема 7

Множество чисел, представимых в виде суммы простого числа и степени двойки, имеет положительную плотность.

Для доказательства рассмотрим $f(n) = \#\{p, k : n = p + 2^k\}$. Покажем, что

$$\sum_{n\le x} f(n)^2 \ll x.$$

Тогда из неравенства Коши-Буняковского-Шварца имеем

$$\#\{n \le x : f(n) \ne 0\} \sum_{n\le x} f(n)^2 \gg \left(\sum_{n\le x} f(n)\right)^2 \gg (\pi(x)\ln x)^2 \gg x^2.$$

Нужную нам сумму можно проинтерпретировать следующим образом:

$$\sum_{n\le x} f(n)^2 = \sum_{p,q,k,m:p+2^k=q+2^m\le x} 1 \ll \sum_{k<m\le \ln x/\ln 2} r_{2^m-2^k}(x),$$

где

$$r_a(x) = \#\{p-q=a, p, q \le x\}.$$

Нужную нам сумму можно проинтерпретировать следующим образом:

$$\sum_{n\le x} f(n)^2 = \sum_{p,q,k,m:p+2^k=q+2^m\le x} 1 \ll \sum_{k<m\le \ln x/\ln 2} r_{2^m-2^k}(x),$$

где

$$r_a(x) = \#\{p-q=a, p, q\le x\}.$$

Так как комбинаторное решето позволяет установить точные по порядку оценки для таких величин, то имеем

$$r_a(x) \ll \frac{a}{\varphi(a)}\frac{x}{\ln^2 x}.$$

3. Теорема Романова

Нужную нам сумму можно проинтерпретировать следующим образом:

$$\sum_{n\le x} f(n)^2 = \sum_{p,q,k,m:p+2^k=q+2^m\le x} 1 \ll \sum_{k<m\le \ln x/\ln 2} r_{2^m-2^k}(x),$$

где

$$r_a(x) = \#\{p-q=a, p, q\le x\}.$$

Так как комбинаторное решето позволяет установить точные по порядку оценки для таких величин, то имеем

$$r_a(x) \ll \frac{a}{\varphi(a)}\frac{x}{\ln^2 x}.$$

Учитывая, что $\varphi(2^m-2^k) = 2^{k-1}\varphi(2^{m-k}-1)$, получаем

$$\sum_{k<m\le \ln x/\ln 2} r_{2^m-2^k}(x) \ll \ln x \sum_{2^k\le x} \frac{2^k-1}{\varphi(2^k-1)}\frac{x}{\ln^2 x}.$$

3. Теорема Романова

Имеет место лемма

Лемма 2

Справедливо неравенство

$$\sum_{2^k \le x} \frac{2^k - 1}{\varphi(2^k - 1)} \ll \ln x.$$

Имеет место лемма

Лемма 2

Справедливо неравенство

$$\sum_{2^k \le x} \frac{2^k - 1}{\varphi(2^k - 1)} \ll \ln x.$$

Отсюда и получается требуемое утверждение.

Спасибо за внимание!