Промежутки между простыми числами

Александр Калмынин

Распределение простых чисел
2 декабря 2020

1. Введение

Одна из гипотез в списке Ландау, сформулированном на прошлой лекции, утверждает, что между соседними квадратами натуральных чисел всегда есть простое число. В частности, если данная гипотеза верна, то $g_n := p_{n+1} - p_n \ll \sqrt{p_n}$, где p_n означает n-ное простое число.

1. Введение

Одна из гипотез в списке Ландау, сформулированном на прошлой лекции, утверждает, что между соседними квадратами натуральных чисел всегда есть простое число. В частности, если данная гипотеза верна, то $g_n := p_{n+1} - p_n \ll \sqrt{p_n}$, где p_n означает n-ное простое число. Хорошо известно, что если верна гипотеза Римана, то выполнено соотношение

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x}\ln^2 x),$$

откуда легко следует, что гипотеза Римана влечёт оценку $g_n \ll \sqrt{p_n}\ln^2 p_n$.

1. Введение

Одна из гипотез в списке Ландау, сформулированном на прошлой лекции, утверждает, что между соседними квадратами натуральных чисел всегда есть простое число. В частности, если данная гипотеза верна, то $g_n := p_{n+1} - p_n \ll \sqrt{p_n}$, где p_n означает n-ное простое число. Хорошо известно, что если верна гипотеза Римана, то выполнено соотношение

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x}\ln^2 x),$$

откуда легко следует, что гипотеза Римана влечёт оценку $g_n \ll \sqrt{p_n}\ln^2 p_n$. Удивительным образом, оказывается, что для доказательства степенной оценки $g_n \ll p_n^{1-c}$ не обязательно располагать границами нулей дзета-функции вида

$$\zeta(\beta + i\gamma) = 0 \implies \beta < 1 - c_1$$

для какого-либо $c_1 > 0$.

1. Введение

Более точно, для доказательства таких оценок нужно только гарантировать, что дзета-функция не может иметь много нулей с большой вещественной частью и $|\gamma| \le T$. Такие утверждения называются теоремами о плотности нулей.

1. Введение

Более точно, для доказательства таких оценок нужно только гарантировать, что дзета-функция не может иметь много нулей с большой вещественной частью и $|\gamma| \leq T$. Такие утверждения называются теоремами о плотности нулей. При помощи них (и некоторых других соображений) оценка $g_n \ll p_n^{1-c}$ была доказана для таких значений c:

1. Введение

Более точно, для доказательства таких оценок нужно только гарантировать, что дзета-функция не может иметь много нулей с большой вещественной частью и $|\gamma| \leq T$. Такие утверждения называются теоремами о плотности нулей. При помощи них (и некоторых других соображений) оценка $g_n \ll p_n^{1-c}$ была доказана для таких значений c:

- $c = \frac{1}{33000}$ (Г. Хохайзель, 1930)

1. Введение

Более точно, для доказательства таких оценок нужно только гарантировать, что дзета-функция не может иметь много нулей с большой вещественной частью и $|\gamma| \leq T$. Такие утверждения называются теоремами о плотности нулей. При помощи них (и некоторых других соображений) оценка $g_n \ll p_n^{1-c}$ была доказана для таких значений c:

- $c = \frac{1}{33000}$ (Г. Хохайзель, 1930)
- $c = \frac{1}{250}$ (Х. Хейльбронн, 1933)

Более точно, для доказательства таких оценок нужно только гарантировать, что дзета-функция не может иметь много нулей с большой вещественной частью и $|\gamma| \leq T$. Такие утверждения называются теоремами о плотности нулей. При помощи них (и некоторых других соображений) оценка $g_n \ll p_n^{1-c}$ была доказана для таких значений c:

- $c = \frac{1}{33000}$ (Г. Хохайзель, 1930)
- $c = \frac{1}{250}$ (Х. Хейльбронн, 1933)
- $c < \frac{1}{4}$ (Н. Г. Чудаков, 1936)

1. Введение

Более точно, для доказательства таких оценок нужно только гарантировать, что дзета-функция не может иметь много нулей с большой вещественной частью и $|\gamma| \leq T$. Такие утверждения называются теоремами о плотности нулей. При помощи них (и некоторых других соображений) оценка $g_n \ll p_n^{1-c}$ была доказана для таких значений c:

- $c = \frac{1}{33000}$ (Г. Хохайзель, 1930)
- $c = \frac{1}{250}$ (Х. Хейльбронн, 1933)
- $c < \frac{1}{4}$ (Н. Г. Чудаков, 1936)
- $c < \frac{3}{8}$

Более точно, для доказательства таких оценок нужно только гарантировать, что дзета-функция не может иметь много нулей с большой вещественной частью и $|\gamma| \leq T$. Такие утверждения называются теоремами о плотности нулей. При помощи них (и некоторых других соображений) оценка $g_n \ll p_n^{1-c}$ была доказана для таких значений c:

- $c = \frac{1}{33000}$ (Г. Хохайзель, 1930)
- $c = \frac{1}{250}$ (Х. Хейльбронн, 1933)
- $c < \frac{1}{4}$ (Н. Г. Чудаков, 1936)
- $c < \frac{3}{8}$ и $c < \frac{348}{925}$ (А. Ингам, 1937)

1. Введение

Более точно, для доказательства таких оценок нужно только гарантировать, что дзета-функция не может иметь много нулей с большой вещественной частью и $|\gamma| \leq T$. Такие утверждения называются теоремами о плотности нулей. При помощи них (и некоторых других соображений) оценка $g_n \ll p_n^{1-c}$ была доказана для таких значений c:

- $c = \frac{1}{33000}$ (Г. Хохайзель, 1930)
- $c = \frac{1}{250}$ (Х. Хейльбронн, 1933)
- $c < \frac{1}{4}$ (Н. Г. Чудаков, 1936)
- $c < \frac{3}{8}$ и $c < \frac{348}{925}$ (А. Ингам, 1937)
- $c < \frac{5}{12}$ (М. Хаксли, 1972)

1. Введение

Более точно, для доказательства таких оценок нужно только гарантировать, что дзета-функция не может иметь много нулей с большой вещественной частью и $|\gamma| \leq T$. Такие утверждения называются теоремами о плотности нулей. При помощи них (и некоторых других соображений) оценка $g_n \ll p_n^{1-c}$ была доказана для таких значений c:

- $c = \frac{1}{33000}$ (Г. Хохайзель, 1930)
- $c = \frac{1}{250}$ (Х. Хейльбронн, 1933)
- $c < \frac{1}{4}$ (Н. Г. Чудаков, 1936)
- $c < \frac{3}{8}$ и $c < \frac{348}{925}$ (А. Ингам, 1937)
- $c < \frac{5}{12}$ (М. Хаксли, 1972)
- $c < \frac{19}{40}$ (Р. Бэйкер, Г. Харман, Я. Пинц, 2001)

1. Введение

Если же говорить о нижних оценках для g_n, то есть об аномально больших интервалах, не содержащих простых чисел, то рассматривают величину

1. Введение

Если же говорить о нижних оценках для g_n, то есть об аномально больших интервалах, не содержащих простых чисел, то рассматривают величину

$$G(X) = \max_{p_{n+1} \le X} (p_{n+1} - p_n),$$

то есть наибольшую длину интервала между соседними простыми числами, лежащими в $[1, X]$.

1. Введение

Если же говорить о нижних оценках для g_n, то есть об аномально больших интервалах, не содержащих простых чисел, то рассматривают величину

$$G(X) = \max_{p_{n+1} \le X} (p_{n+1} - p_n),$$

то есть наибольшую длину интервала между соседними простыми числами, лежащими в $[1, X]$. Так как число номеров n, для которых $p_{n+1} \le X$, есть $\pi(X) - 1 \sim \frac{X}{\ln X}$, то средняя длина интервала равна $(1 + o(1)) \ln X$, так что, в частности, $G(X) \ge (1 + o(1)) \ln X$.

1. Введение

Если же говорить о нижних оценках для g_n, то есть об аномально больших интервалах, не содержащих простых чисел, то рассматривают величину

$$G(X) = \max_{p_{n+1} \leq X} (p_{n+1} - p_n),$$

то есть наибольшую длину интервала между соседними простыми числами, лежащими в $[1, X]$. Так как число номеров n, для которых $p_{n+1} \leq X$, есть $\pi(X) - 1 \sim \frac{X}{\ln X}$, то средняя длина интервала равна $(1 + o(1)) \ln X$, так что, в частности, $G(X) \geq (1 + o(1)) \ln X$. Имеются и более сильные нижние оценки для $G(X)$:

$$G(X) \gg \frac{\ln \ln \ln X}{\ln \ln \ln \ln X} \ln X \text{ (Westzynthius, 1931)}$$

1. Введение

Если же говорить о нижних оценках для g_n, то есть об аномально больших интервалах, не содержащих простых чисел, то рассматривают величину

$$G(X) = \max_{p_{n+1} \leq X} (p_{n+1} - p_n),$$

то есть наибольшую длину интервала между соседними простыми числами, лежащими в $[1, X]$. Так как число номеров n, для которых $p_{n+1} \leq X$, есть $\pi(X) - 1 \sim \frac{X}{\ln X}$, то средняя длина интервала равна $(1 + o(1)) \ln X$, так что, в частности, $G(X) \geq (1 + o(1)) \ln X$. Имеются и более сильные нижние оценки для $G(X)$:

$$G(X) \gg \frac{\ln\ln\ln X}{\ln\ln\ln\ln X} \ln X \text{ (Westzynthius, 1931)}$$

$$G(X) \gg \frac{\ln\ln X}{\ln\ln\ln^2 X} \ln X \text{ (Эрдёш 1935)}$$

Сегодня мы докажем результат Р. Ранкина, порядок которого не поддавался улучшению 76 лет:

1. Введение

Сегодня мы докажем результат Р. Ранкина, порядок которого не поддавался улучшению 76 лет:

Теорема 1 (Ранкин, 1938)

Справедливо неравенство

$$G(X) \gg \frac{\ln\ln X \ln\ln\ln\ln X}{\ln\ln\ln^2 X} \ln X.$$

1. Введение

Сегодня мы докажем результат Р. Ранкина, порядок которого не поддавался улучшению 76 лет:

Теорема 1 (Ранкин, 1938)

Справедливо неравенство

$$G(X) \gg \frac{\ln\ln X \ln\ln\ln\ln X}{\ln\ln\ln^2 X} \ln X.$$

Данный результат удалось побить только в 2014 году. Усилиями пяти авторов удалось достичь такого результата:

Теорема (К. Форд, Б. Грин, С. Конягин, Д. Мэйнард, Т. Тао, 2014)

$$G(X) \gg \frac{\ln\ln X \ln\ln\ln\ln X}{\ln\ln\ln X} \ln X.$$

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Наше доказательство будет опираться на "просеивающий" аргумент, подобный решету Эратосфена.

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Наше доказательство будет опираться на "просеивающий" аргумент, подобный решету Эратосфена. Более точно, мы возьмём $x = \frac{1}{2}\ln X$ и выберем натуральное A из интервала $[P(x), 2P(x)]$ такое, что для любого $n \le y$ существует $p \le x$ такое, что

$$n + A \equiv 0 \pmod p,$$

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Наше доказательство будет опираться на "просеивающий" аргумент, подобный решету Эратосфена. Более точно, мы возьмём $x = \frac{1}{2}\ln X$ и выберем натуральное A из интервала $[P(x), 2P(x)]$ такое, что для любого $n \le y$ существует $p \le x$ такое, что

$$n + A \equiv 0 \pmod{p},$$

где y — некоторая функция от x, а $P(x) = \prod_{p \le x} p$. Заметим также, что в силу Китайской Теоремы об Остатках достаточно выбрать по одному остатку a_p по модулю каждого простого $p \le x$, заменив условие $p \mid n + A$ на $p \mid n + a_p$.

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Наше доказательство будет опираться на "просеивающий" аргумент, подобный решету Эратосфена. Более точно, мы возьмём $x = \frac{1}{2}\ln X$ и выберем натуральное A из интервала $[P(x), 2P(x)]$ такое, что для любого $n \le y$ существует $p \le x$ такое, что

$$n + A \equiv 0 \pmod{p},$$

где y — некоторая функция от x, а $P(x) = \prod_{p \le x} p$. Заметим также, что в силу Китайской Теоремы об Остатках достаточно выбрать по одному остатку a_p по модулю каждого простого $p \le x$, заменив условие $p \mid n + A$ на $p \mid n + a_p$. Для успешной работы нашей конструкции нам понадобится оценка для количества гладких чисел, то есть чисел с маленькими простыми делителями.

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Наше доказательство будет опираться на "просеивающий" аргумент, подобный решету Эратосфена. Более точно, мы возьмём $x = \frac{1}{2}\ln X$ и выберем натуральное A из интервала $[P(x), 2P(x)]$ такое, что для любого $n \leq y$ существует $p \leq x$ такое, что

$$n + A \equiv 0 \pmod{p},$$

где y — некоторая функция от x, а $P(x) = \prod_{p \leq x} p$. Заметим также, что в силу Китайской Теоремы об Остатках достаточно выбрать по одному остатку a_p по модулю каждого простого $p \leq x$, заменив условие $p \mid n + A$ на $p \mid n + a_p$. Для успешной работы нашей конструкции нам понадобится оценка для количества гладких чисел, то есть чисел с маленькими простыми делителями.

Теорема 2

Пусть $z \leq y$, $z \to \infty$, $u = \frac{\ln y}{\ln z}$, $\ln u < \frac{1}{3}\ln z$. Если $\Psi(y, z)$ есть число $z-$гладких чисел, не превосходящих y, то

$$\Psi(y, z) \ll y \ln z \exp(-u \ln u + O(u)).$$

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Возьмём некоторое $0 < \rho < \frac{1}{3}$ и произведем следующее тривиальное наблюдение: функция $\left(\frac{y}{n}\right)^{1-\rho}$ не превосходит единицы на интересующем нас отрезке $[1, y]$.

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Возьмём некоторое $0 < \rho < \frac{1}{3}$ и произведем следующее тривиальное наблюдение: функция $\left(\frac{y}{n}\right)^{1-\rho}$ не превосходит единицы на интересующем нас отрезке $[1, y]$. Следовательно,

$$\Psi(y,z) = \sum_{\substack{n \leq y \\ n \text{ — } z\text{-гладкое}}} 1 \leq \sum_{\substack{n \leq y \\ n \text{ — } z\text{-гладкое}}} \left(\frac{y}{n}\right)^{1-\rho}.$$

Возьмём некоторое $0 < \rho < \frac{1}{3}$ и произведем следующее тривиальное наблюдение: функция $\left(\frac{y}{n}\right)^{1-\rho}$ не превосходит единицы на интересующем нас отрезке $[1, y]$. Следовательно,

$$\Psi(y, z) = \sum_{\substack{n \le y \\ n \text{ — } z\text{-гладкое}}} 1 \le \sum_{\substack{n \le y \\ n \text{ — } z\text{-гладкое}}} \left(\frac{y}{n}\right)^{1-\rho}.$$

Во второй сумме избавимся от условия $n \le y$ и получим сумму, допускающую разложение в произведение:

$$\Psi(y, z) \le \sum_{\substack{n \le y \\ n \text{ — } z\text{-гладкое}}} \left(\frac{y}{n}\right)^{1-\rho} \le \sum_{n \text{ — } z\text{-гладкое}} \left(\frac{y}{n}\right)^{1-\rho} =$$

Возьмём некоторое $0 < \rho < \frac{1}{3}$ и произведем следующее тривиальное наблюдение: функция $\left(\frac{y}{n}\right)^{1-\rho}$ не превосходит единицы на интересующем нас отрезке $[1, y]$. Следовательно,

$$\Psi(y,z) = \sum_{\substack{n \le y \\ n\text{ — } z\text{-гладкое}}} 1 \le \sum_{\substack{n \le y \\ n\text{ — } z\text{-гладкое}}} \left(\frac{y}{n}\right)^{1-\rho}.$$

Во второй сумме избавимся от условия $n \le y$ и получим сумму, допускающую разложение в произведение:

$$\Psi(y,z) \le \sum_{\substack{n \le y \\ n\text{ — } z\text{-гладкое}}} \left(\frac{y}{n}\right)^{1-\rho} \le \sum_{n\text{ — } z\text{-гладкое}} \left(\frac{y}{n}\right)^{1-\rho} =$$

$$y^{1-\rho} \prod_{p \le z} \left(1 + \frac{1}{p^{1-\rho}} + \frac{1}{p^{2-2\rho}} + \dots\right).$$

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Далее, так как $\rho < \frac{1}{3}$, то каждый множитель можно переписать так:

$$1+\frac{1}{p^{1-\rho}}+\frac{1}{p^{2-2\rho}}+\ldots = 1+\frac{1}{p^{1-\rho}}+O\left(\frac{1}{p^{4/3}}\right) = \exp\left(\frac{1}{p^{1-\rho}}+O\left(\frac{1}{p^{4/3}}\right)\right).$$

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Далее, так как $\rho < \frac{1}{3}$, то каждый множитель можно переписать так:

$$1+\frac{1}{p^{1-\rho}}+\frac{1}{p^{2-2\rho}}+\ldots = 1+\frac{1}{p^{1-\rho}}+O\left(\frac{1}{p^{4/3}}\right) = \exp\left(\frac{1}{p^{1-\rho}}+O\left(\frac{1}{p^{4/3}}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\Psi(y,z) \ll y^{1-\rho}\exp\left(\sum_{p\leq z}\frac{1}{p^{1-\rho}}\right).$$

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Далее, так как $\rho < \frac{1}{3}$, то каждый множитель можно переписать так:

$$1+\frac{1}{p^{1-\rho}}+\frac{1}{p^{2-2\rho}}+\ldots = 1+\frac{1}{p^{1-\rho}}+O\left(\frac{1}{p^{4/3}}\right) = \exp\left(\frac{1}{p^{1-\rho}}+O\left(\frac{1}{p^{4/3}}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\Psi(y,z) \ll y^{1-\rho}\exp\left(\sum_{p\le z}\frac{1}{p^{1-\rho}}\right).$$

Заметим теперь, что

$$\frac{1}{p^{1-\rho}} = \frac{p^{\rho}-1}{p}+\frac{1}{p}.$$

Так как $\sum\limits_{p\le z}\frac{1}{p} = \ln\ln z + O(1)$, получаем

$$\Psi(y,z) \ll y^{1-\rho}\ln z\exp\left(\sum_{p\le z}\frac{p^{\rho}-1}{p}\right).$$

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Для оценки суммы в экспоненте воспользуемся таким общим соображением: если $a > 0$ и $0 \le b \le 1$, то

$$e^{ab} - 1 = ab + \frac{(ab)^2}{2!} + \frac{(ab)^3}{3!} + \ldots \le b\left(a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots\right) = b(e^a - 1).$$

Для оценки суммы в экспоненте воспользуемся таким общим соображением: если $a > 0$ и $0 \leq b \leq 1$, то

$$e^{ab} - 1 = ab + \frac{(ab)^2}{2!} + \frac{(ab)^3}{3!} + \ldots \leq b\left(a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots\right) = b(e^a - 1).$$

Следовательно, для всех $p \leq z$ имеем

$$p^\rho - 1 = \exp\left(\rho \ln z \frac{\ln p}{\ln z}\right) - 1 \leq \left(e^{\rho \ln z} - 1\right) \frac{\ln p}{\ln z}.$$

Для оценки суммы в экспоненте воспользуемся таким общим соображением: если $a > 0$ и $0 \le b \le 1$, то

$$e^{ab} - 1 = ab + \frac{(ab)^2}{2!} + \frac{(ab)^3}{3!} + \ldots \le b\left(a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots\right) = b(e^a - 1).$$

Следовательно, для всех $p \le z$ имеем

$$p^\rho - 1 = \exp\left(\rho \ln z \frac{\ln p}{\ln z}\right) - 1 \le \left(e^{\rho \ln z} - 1\right) \frac{\ln p}{\ln z}.$$

Далее,

$$\sum_{p \le z} \frac{\ln p}{p \ln z} \ll 1,$$

так что

$$\Psi(y,z) \ll y^{1-\rho} \ln z \exp\left(O(e^{\rho \ln z})\right).$$

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

$$\Psi(y,z) \ll y^{1-\rho} \ln z \exp\left(O(e^{\rho \ln z})\right).$$

Выбирая $\rho = \frac{\ln u}{\ln z}$, получаем требуемое.

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

$$\Psi(y,z) \ll y^{1-\rho}\ln z \exp\left(O(e^{\rho\ln z})\right).$$

Выбирая $\rho = \frac{\ln u}{\ln z}$, получаем требуемое.
Докажем теперь Теорему 1. Выберем $y = \frac{x}{12}\frac{\ln x \ln\ln\ln x}{\ln\ln^2 x}$, $z = \exp\left(\frac{\ln\ln\ln x}{4\ln\ln x}\ln x\right)$. Остатки a_p будем выбирать в три шага.

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

$$\Psi(y,z) \ll y^{1-\rho} \ln z \exp\left(O(e^{\rho \ln z})\right).$$

Выбирая $\rho = \frac{\ln u}{\ln z}$, получаем требуемое.
Докажем теперь Теорему 1. Выберем $y = \frac{x}{12} \frac{\ln x \ln\ln\ln x}{\ln \ln^2 x}$,
$z = \exp\left(\frac{\ln\ln\ln x}{4 \ln\ln x} \ln x\right)$. Остатки a_p будем выбирать в три шага.
Шаг 1: для $p < \ln x$ и $z < p < \frac{x}{2}$ выберем $a_p = 0$. Если число $n \le y$ не отсеялось этим шагом, то оно не делится ни на одно простое число из указанных интервалов. Если такое неотсеянное число не является простым, то оно $z-$гладкое. В самом деле, если оно делится на какое-то простое $q > z$, то $q > \frac{x}{2}$, а значит $\frac{n}{q} < \ln x$, так что $\frac{n}{q} = 1$, то есть n — простое. Таким образом, неотсеянных на этом шаге чисел не больше

$$\Psi(y,z) + \pi(y).$$

$$\Psi(y,z) \ll y^{1-\rho} \ln z \exp\left(O(e^{\rho \ln z})\right).$$

Выбирая $\rho = \frac{\ln u}{\ln z}$, получаем требуемое.
Докажем теперь Теорему 1. Выберем $y = \frac{x}{12} \frac{\ln x \ln \ln \ln x}{\ln \ln^2 x}$, $z = \exp\left(\frac{\ln \ln \ln x}{4 \ln \ln x} \ln x\right)$. Остатки a_p будем выбирать в три шага.
Шаг 1: для $p < \ln x$ и $z < p < \frac{x}{2}$ выберем $a_p = 0$. Если число $n \leq y$ не отсеялось этим шагом, то оно не делится ни на одно простое число из указанных интервалов. Если такое неотсеянное число не является простым, то оно $z-$гладкое. В самом деле, если оно делится на какое-то простое $q > z$, то $q > \frac{x}{2}$, а значит $\frac{n}{q} < \ln x$, так что $\frac{n}{q} = 1$, то есть n — простое. Таким образом, неотсеянных на этом шаге чисел не больше

$$\Psi(y,z) + \pi(y).$$

С другой стороны, согласно Теореме 2

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

$$\Psi(y, z) \ll y \ln z \exp(-u \ln u + O(u)),$$

где $u = \frac{\ln y}{\ln z} = (4 + o(1)) \frac{\ln \ln x}{\ln \ln \ln x}$,

$$\Psi(y,z) \ll y \ln z \exp(-u \ln u + O(u)),$$

где $u = \frac{\ln y}{\ln z} = (4+o(1))\frac{\ln\ln x}{\ln\ln\ln x}$, так что $-u\ln u + O(u) = -(4+o(1))\ln\ln x$ и, следовательно,

$$\Psi(y,z) \ll y \ln x e^{-3.5 \ln\ln x} = o(\pi(y)),$$

то есть после первого шага у нас остались в основном простые числа, не превосходящие y.

$$\Psi(y,z) \ll y \ln z \exp(-u \ln u + O(u)),$$

где $u = \frac{\ln y}{\ln z} = (4+o(1))\frac{\ln\ln x}{\ln\ln\ln x}$, так что
$-u\ln u + O(u) = -(4+o(1))\ln\ln x$ и, следовательно,

$$\Psi(y,z) \ll y \ln x e^{-3.5\ln\ln x} = o(\pi(y)),$$

то есть после первого шага у нас остались в основном простые числа, не превосходящие y.
Шаг 2. Остатки a_p для простых между $\ln x$ и z выберем так, чтобы отсеять максимальную пропорцию оставшихся чисел.

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

$$\Psi(y,z) \ll y \ln z \exp(-u \ln u + O(u)),$$

где $u = \frac{\ln y}{\ln z} = (4 + o(1))\frac{\ln\ln x}{\ln\ln\ln x}$, так что
$-u\ln u + O(u) = -(4 + o(1))\ln\ln x$ и, следовательно,

$$\Psi(y,z) \ll y \ln x e^{-3.5\ln\ln x} = o(\pi(y)),$$

то есть после первого шага у нас остались в основном простые числа, не превосходящие y.
Шаг 2. Остатки a_p для простых между $\ln x$ и z выберем так, чтобы отсеять максимальную пропорцию оставшихся чисел. А именно, если мы уже выбрали остатки для всех $q < p$, то a_p мы выберем так, чтобы оставшееся множество уменьшилось хотя бы в $1 - \frac{1}{p}$ раз.

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

$$\Psi(y,z) \ll y \ln z \exp(-u \ln u + O(u)),$$

где $u = \frac{\ln y}{\ln z} = (4 + o(1)) \frac{\ln \ln x}{\ln \ln \ln x}$, так что $-u \ln u + O(u) = -(4 + o(1)) \ln \ln x$ и, следовательно,

$$\Psi(y,z) \ll y \ln x e^{-3.5 \ln \ln x} = o(\pi(y)),$$

то есть после первого шага у нас остались в основном простые числа, не превосходящие y.

Шаг 2. Остатки a_p для простых между $\ln x$ и z выберем так, чтобы отсеять максимальную пропорцию оставшихся чисел. А именно, если мы уже выбрали остатки для всех $q < p$, то a_p мы выберем так, чтобы оставшееся множество уменьшилось хотя бы в $1 - \frac{1}{p}$ раз. Это всегда возможно, так как любой выбор a_p отсеивает одну из p частей оставшегося множества, и эти части не пересекаются.

После второго шага число непросеянных элементов будет не больше

$$(1+o(1))\pi(y)\prod_{\ln x<p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right)=(1+o(1))\frac{y}{\ln y}\frac{\ln\ln x}{\ln z}=$$

После второго шага число непросеянных элементов будет не больше

$$(1+o(1))\pi(y)\prod_{\ln x<p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right)=(1+o(1))\frac{y}{\ln y}\frac{\ln\ln x}{\ln z}=$$

$$=(1+o(1))\frac{x}{12}\frac{\ln\ln\ln x}{\ln\ln^2 x}\frac{4\ln\ln^2 x}{\ln\ln\ln x\ln x}=\left(\frac{1}{3}+o(1)\right)\frac{x}{\ln x}.$$

После второго шага число непросеянных элементов будет не больше

$$(1+o(1))\pi(y)\prod_{\ln x<p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right)=(1+o(1))\frac{y}{\ln y}\frac{\ln\ln x}{\ln z}=$$

$$=(1+o(1))\frac{x}{12}\frac{\ln\ln\ln x}{\ln\ln^2 x}\frac{4\ln\ln^2 x}{\ln\ln\ln x\ln x}=\left(\frac{1}{3}+o(1)\right)\frac{x}{\ln x}.$$

Наконец, третьим шагом мы будем выбирать остатки по модулям $\frac{x}{2}<p\le x$, убирая хотя бы по одному элементу нашего множества, пока не исчерпаем его полностью. Этот результат будет достигнут, поскольку

$$\pi(x)-\pi\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\frac{x}{\ln x}.$$

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Итак, выбирая $A \in [P(x), 2P(x)]$ так, что $n + A$ делится хотя бы на одно простое $p \leq x$ при $n \leq y$, получаем отрезок

$$1 + A, 2 + A, \ldots, [y] + A.$$

не содержащий простых чисел.

2. Гладкие числа и доказательство Теоремы 1

Итак, выбирая $A \in [P(x), 2P(x)]$ так, что $n + A$ делится хотя бы на одно простое $p \leq x$ при $n \leq y$, получаем отрезок

$$1 + A, 2 + A, \ldots, [y] + A.$$

не содержащий простых чисел. Так как

$$[y] + A \leq y + 2P(x) \ll X^{2/3},$$

мы доказали соотношение

$$G(X) \geq [y] \gg \frac{\ln X \ln\ln\ln\ln X \ln\ln X}{\ln\ln\ln^2 X},$$

что и требовалось.

3. Функции Дикмана и Бухштаба

Для некторых значений параметров количество гладких чисел можно вычислить существенно точнее. А именно, если параметр гладкости является фиксированной степенью длины интервала, то выполнено такое соотношение:

3. Функции Дикмана и Бухштаба

Для некторых значений параметров количество гладких чисел можно вычислить существенно точнее. А именно, если параметр гладкости является фиксированной степенью длины интервала, то выполнено такое соотношение:

Теорема 3

Существует непрерывная функция $\rho(A)$ такая, что для всех $A > 0$ выполнено равенство

$$\Psi(x, x^{1/A}) = \rho(A)x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

причем константа в O равномерна на ограниченных интервалах и

$$A\rho'(A) + \rho(A-1) = 0.$$

Для некторых значений параметров количество гладких чисел можно вычислить существенно точнее. А именно, если параметр гладкости является фиксированной степенью длины интервала, то выполнено такое соотношение:

Теорема 3

Существует непрерывная функция $\rho(A)$ такая, что для всех $A > 0$ выполнено равенство

$$\Psi(x, x^{1/A}) = \rho(A)x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right),$$

причем константа в O равномерна на ограниченных интервалах и

$$A\rho'(A) + \rho(A-1) = 0.$$

Будем доказывать это утверждение индукцией по n для всех A из интервала $(n-1, n]$. Для $n = 1$ утверждение очевидно, поскольку $A \leq 1$ и, следовательно, любое $n \leq x$ является $x^{1/A}$–гладким, так что

$$\Psi(x, x^{1/A}) = [x] = x + O(1).$$

3. Функции Дикмана и Бухштаба

Предположим, мы доказали Теорему 3 для всех $A \leq n$. Пусть $B \in (n, n+1]$. Рассмотрим разность

$$\Psi(x, x^{1/n}) - \Psi(x, x^{1/B}).$$

Предположим, мы доказали Теорему 3 для всех $A \leq n$. Пусть $B \in (n, n+1]$. Рассмотрим разность

$$\Psi(x, x^{1/n}) - \Psi(x, x^{1/B}).$$

Эта разность есть количество $n \leq x$, наибольший простой делитель p которых лежит между $x^{1/B}$ и $x^{1/n}$. Для каждого из таких простых p написанное количество равно

$$\Psi(x/p, p).$$

3. Функции Дикмана и Бухштаба

Предположим, мы доказали Теорему 3 для всех $A \le n$. Пусть $B \in (n, n+1]$. Рассмотрим разность

$$\Psi(x, x^{1/n}) - \Psi(x, x^{1/B}).$$

Эта разность есть количество $n \le x$, наибольший простой делитель p которых лежит между $x^{1/B}$ и $x^{1/n}$. Для каждого из таких простых p написанное количество равно

$$\Psi(x/p, p).$$

Далее, так как $x^{1/n} \ge p > x^{1/B} > x^{1/(n+1)}$, то $(x/p)^{1/n} \le p$. Следовательно,

$$\Psi(x/p, p) = \rho\left(\frac{\ln x/p}{\ln p}\right)\frac{x}{p} + O\left(\frac{x}{p \ln x}\right).$$

Тем самым,

$$\Psi(x, x^{1/n}) - \Psi(x, x^{1/B}) = \sum_{x^{1/B} < p \le x^{1/n}} \rho\left(\frac{\ln x/p}{\ln p}\right)\frac{x}{p} + O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Тем самым,

$$\Psi(x, x^{1/n}) - \Psi(x, x^{1/B}) = \sum_{x^{1/B} < p \le x^{1/n}} \rho\left(\frac{\ln x/p}{\ln p}\right)\frac{x}{p} + O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Пользуясь интегрированием по частям и соотношением

$$\sum_{p \le t} \frac{1}{p} = \ln\ln t + B + O\left(\frac{1}{\ln t}\right),$$

получаем

Тем самым,

$$\Psi(x, x^{1/n}) - \Psi(x, x^{1/B}) = \sum_{x^{1/B} < p \le x^{1/n}} \rho\left(\frac{\ln x/p}{\ln p}\right)\frac{x}{p} + O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Пользуясь интегрированием по частям и соотношением

$$\sum_{p \le t} \frac{1}{p} = \ln\ln t + B + O\left(\frac{1}{\ln t}\right),$$

получаем

$$\Psi(x, x^{1/n}) - \Psi(x, x^{1/B}) = x\int_{x^{1/B}}^{x^{1/n}} \rho\left(\frac{\ln x/t}{\ln t}\right)\frac{dt}{t\ln t} + O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Тем самым,

$$\Psi(x,x^{1/n})-\Psi(x,x^{1/B})=\sum_{x^{1/B}<p\le x^{1/n}}\rho\left(\frac{\ln x/p}{\ln p}\right)\frac{x}{p}+O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Пользуясь интегрированием по частям и соотношением

$$\sum_{p\le t}\frac{1}{p}=\ln\ln t+B+O\left(\frac{1}{\ln t}\right),$$

получаем

$$\Psi(x,x^{1/n})-\Psi(x,x^{1/B})=x\int_{x^{1/B}}^{x^{1/n}}\rho\left(\frac{\ln x/t}{\ln t}\right)\frac{dt}{t\ln t}+O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Замена переменных $t=x^{1/w}$ приводит к равенству

$$\Psi(x,x^{1/n})-\Psi(x,x^{1/B})=x\int_{n}^{B}\rho(w-1)\frac{dw}{w}+O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Отсюда следует, что $\rho(B)$ определена и дифференцируема на получинтервале $(n, n+1]$ и

$$\rho(n) - \rho(B) = \int_n^B \rho(w-1)\frac{dw}{w}.$$

Дифференцируя по B, выводим дифференциальное уравнение Теоремы 3.

3. Функции Дикмана и Бухштаба

Отсюда следует, что $\rho(B)$ определена и дифференцируема на получинтервале $(n, n+1]$ и

$$\rho(n) - \rho(B) = \int_n^B \rho(w-1)\frac{dw}{w}.$$

Дифференцируя по B, выводим дифференциальное уравнение Теоремы 3. Наряду с гладкими числами можно рассматривать их противоположность— шершавые или грубые числа. Назовем число n $y-$шершавым, если все его простые делители больше y. Обозначим число $y-$шершавых чисел, не превосходящих x, через $\Phi(x, y)$. Для них справедливо соотношение, аналогичное Теореме 3:

Отсюда следует, что $\rho(B)$ определена и дифференцируема на получинтервале $(n, n+1]$ и

$$\rho(n) - \rho(B) = \int_n^B \rho(w-1)\frac{dw}{w}.$$

Дифференцируя по B, выводим дифференциальное уравнение Теоремы 3. Наряду с гладкими числами можно рассматривать их противоположность— шершавые или грубые числа. Назовем число n $y-$шершавым, если все его простые делители больше y. Обозначим число $y-$шершавых чисел, не превосходящих x, через $\Phi(x, y)$. Для них справедливо соотношение, аналогичное Теореме 3:

Теорема 4

Для всех $u > 1$ выполнено

$$\Phi(x, x^{1/u}) = \frac{(\omega(u) + o(1))x}{\ln x^{1/u}},$$

причем $o(1)$ равномерно при $1 + \varepsilon < u < A$ и $(u\omega(u))' = \omega(u-1)$.

Доказательство этого факта полностью аналогично предыдущей теореме. А именно, при $1 < u \leq 2$ почти все $x^{1/u}$–шершавые числа, не превосходящие x, просты, так что $\omega(u) = \frac{1}{u}$.

Доказательство этого факта полностью аналогично предыдущей теореме. А именно, при $1 < u \leq 2$ почти все $x^{1/u}$–шершавые числа, не превосходящие x, просты, так что $\omega(u) = \frac{1}{u}$. Далее, пусть мы доказали наше соотношение для $1 < u \leq n$. Возьмём $n < v \leq n + 1$ и рассмотрим разность

$$\Phi(x, x^{1/v}) - \Phi(x, x^{1/n}).$$

Доказательство этого факта полностью аналогично предыдущей теореме. А именно, при $1 < u \leq 2$ почти все $x^{1/u}$–шершавые числа, не превосходящие x, просты, так что $\omega(u) = \frac{1}{u}$. Далее, пусть мы доказали наше соотношение для $1 < u \leq n$. Возьмём $n < v \leq n+1$ и рассмотрим разность

$$\Phi(x, x^{1/v}) - \Phi(x, x^{1/n}).$$

Легко видеть, что эта разность есть количество чисел, наименьший простой делитель p которых лежит между $x^{1/u}$ и $x^{1/n}$. Для каждого такого p количество таких чисел равно

$$\Phi(x/p, p) = \frac{\left(\omega\left(\frac{\ln x/p}{\ln p}\right) + o(1)\right)x}{p \ln p}.$$

Следовательно, аналогично предыдущему случаю получаем

$$\Phi(x, x^{1/v}) - \Phi(x, x^{1/n}) = \sum_{x^{1/v} < p \leq x^{1/n}} \frac{\left(\omega\left(\frac{\ln x/p}{\ln p}\right) + o(1)\right) x}{p \ln p} =$$

Следовательно, аналогично предыдущему случаю получаем

$$\Phi(x, x^{1/v}) - \Phi(x, x^{1/n}) = \sum_{x^{1/v} < p \le x^{1/n}} \frac{\left(\omega\left(\frac{\ln x/p}{\ln p}\right) + o(1)\right) x}{p \ln p} =$$

$$= (1 + o(1)) \int_{x^{1/v}}^{x^{1/n}} \frac{\omega\left(\frac{\ln x/t}{\ln t}\right)}{t \ln^2 t} dt = (1 + o(1)) \frac{x}{\ln x} \int_n^v \omega(w - 1) dw.$$

В последнем равенстве мы сделали замену $t = x^{1/w}$.

3. Функции Дикмана и Бухштаба

Следовательно, аналогично предыдущему случаю получаем

$$\Phi(x, x^{1/v}) - \Phi(x, x^{1/n}) = \sum_{x^{1/v} < p \le x^{1/n}} \frac{\left(\omega\left(\frac{\ln x/p}{\ln p}\right) + o(1)\right) x}{p \ln p} =$$

$$= (1 + o(1)) \int_{x^{1/v}}^{x^{1/n}} \frac{\omega\left(\frac{\ln x/t}{\ln t}\right)}{t \ln^2 t} dt = (1 + o(1)) \frac{x}{\ln x} \int_n^v \omega(w - 1) dw.$$

В последнем равенстве мы сделали замену $t = x^{1/w}$. Таким образом,

$$v\omega(v) - n\omega(n) = \int_n^v \omega(w - 1) dw,$$

откуда и получается нужное соотношение.

Спасибо за внимание!