Распределение простых чисел

Листок 2

Эти задачи будут приносить на 40% меньше баллов после 5 декабря.

1. Пусть $R(x) = \psi(x) - x$.
   а) (0.3 б) Докажите, что при $\mathrm{Re}\, s > 1$ выполнено равенство
   $$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{s}{s-1} + s\int_1^{+\infty} \frac{R(t)}{t^{s+1}}dt.$$
   б) (0.1 б) Предположим, что выполнена оценка $R(t) \ll t^\theta$. Докажите, что $\zeta(s)$ не имеет нулей с $\mathrm{Re}\, s > \theta$.
   в) (0.2 б) Пусть $\vartheta = \inf\{\theta : R(t) \ll t^\theta\}$ и $\Theta = \sup\{\mathrm{Re}\,\rho : \zeta(\rho) = 0\}$. Покажите, что $\vartheta = \Theta$.
2. Пусть $M(x) = \sum\limits_{n\le x} \mu(n)$.
   а) (0.3 б) Покажите, что при $\mathrm{Re}\, s > 1$ справедливо равенство
   $$\frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^{+\infty} \frac{M(t)}{t^{s+1}}dt$$
   б) (0.3 б) Предположим, что при $x \to +\infty$ выполнено $M(x) = o(\sqrt{x}\ln x)$. Докажите, что для любого вещественного γ при $\varepsilon \to +0$ выполнено
   $$\frac{1}{\zeta(1/2+\varepsilon+i\gamma)} = o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$
   и, следовательно, все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на критической прямой и просты.
3. Положим $U(x) = \sum_{n\le x} \mu(n)\ln n$.
   а) (0.2 б) При помощи суммирования по частям докажите, что при $x \ge 2$ выполнено неравенство
   $$M(x) \ll \frac{x}{\ln x} \sup_{\sqrt{x}<y\le x} \left|\frac{U(y)}{y}\right| + \sqrt{x}$$
   б) (0.2 б) Докажите, что $(\mu * \Lambda)(n) = -\mu(n)\ln n$.
   в) (0.4 б) Выведите из асимптотического закона распределения простых чисел с остаточным членом $O(xe^{-c\sqrt{\ln x}})$ оценку
   $$M(x) \ll \frac{x(\ln\ln x)^2}{\ln x}.$$
   Указание: Воспользуйтесь задачей 4б листка 1 и задачей 6а листка 1 для $z = \exp(A(\ln\ln x)^2)$.

4.

а) (0.1 б) Докажите, что для любого натурального N и $a_N = \binom{2N}{N} = \frac{(2N)!}{N!^2}$ выполнены неравенства

$$\frac{2^{2N}}{2N+1} \leq a_N \leq 2^{2N}$$

б) (0.2 б) Покажите, что a_N делится на все простые в интервале $(N, 2N]$ и ни на одно простое из интервала $(2N/3, N]$.

в) (0.1 б) Докажите, что

$$\sum_{p \leq x} \ln p \leq 2x \ln 2 + \ln x.$$

г) (0.2 б) Пусть между N и $2N$ нет ни одного простого числа. Покажите, что тогда

$$a_N \leq (2N)^{\sqrt{2N}} \prod_{p \leq 2N/3} p.$$

д) (0.3 б) Докажите, что в любом интервале вида $(N, 2N]$ есть хотя бы одно простое число.

5. (0.4 б) Пусть $\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ и константы A и B таковы, что

$$\xi(s) = e^{As+B} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right).$$

Покажите, что $e^B = 1$ и $A = 0$.