Границы нулей для L-функций Дирихле. Нули Зигеля.

Александр Калмынин

Распределение простых чисел
18 ноября 2020

1. Напоминание и основные результаты

На прошлой лекции мы обсудили сведение вопроса о простых числах в арифметических прогрессиях к величинам $\psi(x;\chi)$, где

$$\psi(x;\chi) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)\chi(n)$$

и χ — примитивный характер Дирихле.

1. Напоминание и основные результаты

На прошлой лекции мы обсудили сведение вопроса о простых числах в арифметических прогрессиях к величинам $\psi(x;\chi)$, где

$$\psi(x;\chi) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)\chi(n)$$

и χ — примитивный характер Дирихле. Кроме того, мы доказали аналог явной формулы для ψ-функции Чебышёва:

1. Напоминание и основные результаты

На прошлой лекции мы обсудили сведение вопроса о простых числах в арифметических прогрессиях к величинам $\psi(x;\chi)$, где

$$\psi(x;\chi) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)\chi(n)$$

и χ — примитивный характер Дирихле. Кроме того, мы доказали аналог явной формулы для ψ-функции Чебышёва:

Теорема

Пусть $2 \le T, q \le x$ и χ — примитивный характер по модулю q. Справедливо соотношение

$$\psi(x;\chi) = -\sum_{|\mathrm{Im}\,\rho|\le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right),$$

где ρ пробегает нетривиальные нули $L(s;\chi)$ с учетом кратности.

1. Напоминание и основные результаты

Кроме того, нам удалось получить следующую приближенную формулу для логарифмической производной L-функции:

Кроме того, нам удалось получить следующую приближенную формулу для логарифмической производной L-функции:

Лемма

Если χ *— примитивный характер* $\mod q$ *и* $s = \sigma + it$, $1/3 < \sigma < 3$, *то*

$$\frac{L'}{L}(s;\chi) = \sum_{\rho : |t-\gamma| \le 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\ln(q(|t|+2))).$$

Кроме того, нам удалось получить следующую приближенную формулу для логарифмической производной L-функции:

Лемма

Если χ *— примитивный характер* $\mod q$ *и* $s = \sigma + it$, $1/3 < \sigma < 3$, *то*

$$\frac{L'}{L}(s;\chi) = \sum_{\rho:|t-\gamma|\le 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\ln(q(|t|+2))).$$

При помощи этой леммы мы докажем такие результаты:

Теорема 1

Пусть χ *— примитивный характер по модулю* q. *Если* $\chi^2 \neq \chi_0$, *то для всякого нуля* $\rho = \beta + i\gamma$ L*—функции* $L(s;\chi)$ *выполнено*

$$\beta \le 1 - \frac{c}{\ln(q(|t|+1))}.$$

1. Напоминание и основные результаты

Кроме того, нам удалось получить следующую приближенную формулу для логарифмической производной L-функции:

Лемма

Если χ — примитивный характер $\mod q$ и $s = \sigma + it$, $1/3 < \sigma < 3$, то

$$\frac{L'}{L}(s;\chi) = \sum_{\rho:|t-\gamma|\le 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\ln(q(|t|+2))).$$

При помощи этой леммы мы докажем такие результаты:

Теорема 1

Пусть χ — примитивный характер по модулю q. Если $\chi^2 \neq \chi_0$, то для всякого нуля $\rho = \beta + i\gamma$ $L-$функции $L(s;\chi)$ выполнено

$$\beta \le 1 - \frac{c}{\ln(q(|t|+1))}.$$

Такое же неравенство верно, если $\chi^2 = \chi_0$ и $\gamma \neq 0$.

Для вещественных нулей вещественных характеров справедлива следующая существенно более слабая оценка:

Теорема 2

Все вещественные нули β_χ L-функций квадратичных характеров χ по модулям $q_1 \leq q$, кроме, быть может, одного, удовлетворяют неравенству

$$\beta_\chi \leq 1 - \frac{c_1}{\ln q}.$$

1. Напоминание и основные результаты

Для вещественных нулей вещественных характеров справедлива следующая существенно более слабая оценка:

Теорема 2

Все вещественные нули β_χ L-функций квадратичных характеров χ по модулям $q_1 \leq q$, кроме, быть может, одного, удовлетворяют неравенству

$$\beta_\chi \leq 1 - \frac{c_1}{\ln q}.$$

Для исключительного нуля β, если он существует, справедливо соотношение

$$\beta \leq 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^\varepsilon}$$

для всякого $\varepsilon > 0$ и некоторого $c(\varepsilon) > 0$.

1. Напоминание и основные результаты

Для вещественных нулей вещественных характеров справедлива следующая существенно более слабая оценка:

Теорема 2

Все вещественные нули β_χ L-функций квадратичных характеров χ по модулям $q_1 \le q$, кроме, быть может, одного, удовлетворяют неравенству

$$\beta_\chi \le 1 - \frac{c_1}{\ln q}.$$

Для исключительного нуля β, если он существует, справедливо соотношение

$$\beta \le 1 - \frac{c(\varepsilon)}{q^\varepsilon}$$

для всякого $\varepsilon > 0$ и некоторого $c(\varepsilon) > 0$.

Такие исключительные нули называются *нулями Зигеля.*

В этом разделе мы докажем Теорему 1. Доказательство будет аналогично доказательству границы нулей де ла Валле-Пуссена для $\zeta(s)$. А именно, мы будем пользоваться неравенством

$$3 + 4\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, z^2 \geq 0$$

для любого z с условием $|z| = 1$.

2. Комплексные характеры/комплексные нули

В этом разделе мы докажем Теорему 1. Доказательство будет аналогично доказательству границы нулей де ла Валле-Пуссена для $\zeta(s)$. А именно, мы будем пользоваться неравенством

$$3 + 4\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, z^2 \geq 0$$

для любого z с условием $|z| = 1$. (если $z = e^{i\varphi}$, то неравенство обращается в знакомое нам $3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi \geq 0$)

В этом разделе мы докажем Теорему 1. Доказательство будет аналогично доказательству границы нулей де ла Валле-Пуссена для $\zeta(s)$. А именно, мы будем пользоваться неравенством

$$3 + 4\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, z^2 \geq 0$$

для любого z с условием $|z| = 1$. (если $z = e^{i\varphi}$, то неравенство обращается в знакомое нам $3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi \geq 0$) Выберем $\sigma > 1$ и заметим, что

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma + it; \chi) - \mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma + 2it; \chi^2) =$$

2. Комплексные характеры/комплексные нули

В этом разделе мы докажем Теорему 1. Доказательство будет аналогично доказательству границы нулей де ла Валле-Пуссена для $\zeta(s)$. А именно, мы будем пользоваться неравенством

$$3 + 4\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, z^2 \geq 0$$

для любого z с условием $|z| = 1$. (если $z = e^{i\varphi}$, то неравенство обращается в знакомое нам $3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi \geq 0$) Выберем $\sigma > 1$ и заметим, что

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma + it; \chi) - \mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma + 2it; \chi^2) =$$

$$\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\left(3 + 4\mathrm{Re}\,(n^{-it}\chi(n)) + \mathrm{Re}\,(n^{-2it}\chi^2(n))\right) \geq 0$$

2. Комплексные характеры/комплексные нули

Пусть теперь $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль $L(s;\chi)$. Выберем $\gamma = t$ и воспользуемся приближением для $\frac{L'}{L}(s;\chi)$, получим

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma - 1} + c_2$$

2. Комплексные характеры/комплексные нули

Пусть теперь $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль $L(s;\chi)$. Выберем $\gamma = t$ и воспользуемся приближением для $\frac{L'}{L}(s;\chi)$, получим

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma - 1} + c_2$$

и

$$-\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma + i\gamma;\chi) \leq A\ln(q(|\gamma|+2)) - \mathrm{Re}\sum_{|\gamma-\gamma'|\leq 1}\frac{1}{\sigma + i\gamma - \rho} \leq$$

$$\leq A\ln(q(|\gamma|+2)) - \frac{1}{\sigma - \beta}.$$

Пусть теперь $\rho = \beta + i\gamma$ — нуль $L(s;\chi)$. Выберем $\gamma = t$ и воспользуемся приближением для $\frac{L'}{L}(s;\chi)$, получим

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \le \frac{1}{\sigma - 1} + c_2$$

и

$$-\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma + i\gamma;\chi) \le A\ln(q(|\gamma|+2)) - \mathrm{Re}\sum_{|\gamma-\gamma'|\le 1}\frac{1}{\sigma + i\gamma - \rho} \le$$

$$\le A\ln(q(|\gamma|+2)) - \frac{1}{\sigma - \beta}.$$

Пусть теперь χ — комплексный характер, то есть $\chi^2 \ne \chi_0$. Тогда χ^2 индуцирован некоторым примитивным характером χ_1 по модулю $1 < q_1 \mid q$.

2. Комплексные характеры/комплексные нули

В этом случае получаем

$$\left|\frac{L'}{L}(s;\chi^2) - \frac{L'}{L}(s;\chi_1)\right| \le \sum_{(n,q)\neq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \le \sum_{p|q} \ln p \le \ln q.$$

2. Комплексные характеры/комплексные нули

В этом случае получаем

$$\left|\frac{L'}{L}(s;\chi^2)-\frac{L'}{L}(s;\chi_1)\right|\leq\sum_{(n,q)\neq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\leq\sum_{p|q}\ln p\leq\ln q.$$

Отсюда

$$-\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma+2i\gamma;\chi^2)\leq A\ln(q(|2\gamma|+2))+\ln q.$$

Пользуясь полученными оценками, выводим

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)-\mathrm{Re}\,(4\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma;\chi)-\frac{L'}{L}(\sigma+2i\gamma;\chi^2))\leq\frac{3}{\sigma-1}-\frac{4}{\sigma-\beta}+B\ln(q(|\gamma|+2)$$

2. Комплексные характеры/комплексные нули

В этом случае получаем

$$\left|\frac{L'}{L}(s;\chi^2)-\frac{L'}{L}(s;\chi_1)\right| \le \sum_{(n,q)\ne 1}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \le \sum_{p|q}\ln p \le \ln q.$$

Отсюда

$$-\mathrm{Re}\,\frac{L'}{L}(\sigma+2i\gamma;\chi^2) \le A\ln(q(|2\gamma|+2))+\ln q.$$

Пользуясь полученными оценками, выводим

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)-\mathrm{Re}\,(4\frac{L'}{L}(\sigma+i\gamma;\chi)-\frac{L'}{L}(\sigma+2i\gamma;\chi^2)) \le \frac{3}{\sigma-1}-\frac{4}{\sigma-\beta}+B\ln(q(|\gamma|+2)$$

для некоторого $B\ge 0$. Следовательно,

$$\frac{4}{\sigma-\beta} \le \frac{3}{\sigma-1}+B\ln(q(|\gamma|+2)).$$

Выбирая $\sigma = 1+\frac{1}{2B\ln(q(|\gamma|+2))}$, получаем $\beta \le 1-\frac{1}{14B\ln(q(|\gamma|+2))}$, что и требовалось доказать.

2. Комплексные характеры/комплексные нули

Осталось разобраться со случаем $\chi^2 = \chi_0$, т.е. с комплексными нулями вещественных характеров.

2. Комплексные характеры/комплексные нули

Осталось разобраться со случаем $\chi^2 = \chi_0$, т.е. с комплексными нулями вещественных характеров. Есть две различных ситуации: величина $|\gamma|$ может быть близка к нулю или далека от нуля. Рассмотрим сначала второй случай.

2. Комплексные характеры/комплексные нули

Осталось разобраться со случаем $\chi^2 = \chi_0$, т.е. с комплексными нулями вещественных характеров. Есть две различных ситуации: величина $|\gamma|$ может быть близка к нулю или далека от нуля. Рассмотрим сначала второй случай. Пусть $\kappa > 0$– маленькая константа. Если $|\gamma| \geq \frac{\kappa}{\ln q}$, то, аналогично предыдущему случаю,

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma + 2i\gamma; \chi^2) \leq -\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2i\gamma) + \ln q \leq$$

$$\leq \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sigma + 2i\gamma - 1} + A\ln(q(|2\gamma| + 2)) \leq A_2(\kappa)\ln(q(|2\gamma| + 2)).$$

2. Комплексные характеры/комплексные нули

Осталось разобраться со случаем $\chi^2 = \chi_0$, т.е. с комплексными нулями вещественных характеров. Есть две различных ситуации: величина $|\gamma|$ может быть близка к нулю или далека от нуля. Рассмотрим сначала второй случай. Пусть $\kappa > 0$– маленькая константа. Если $|\gamma| \geq \frac{\kappa}{\ln q}$, то, аналогично предыдущему случаю,

$$-\mathrm{Re}\frac{L'}{L}(\sigma + 2i\gamma; \chi^2) \leq -\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2i\gamma) + \ln q \leq$$

$$\leq \mathrm{Re}\,\frac{1}{\sigma + 2i\gamma - 1} + A\ln(q(|2\gamma| + 2)) \leq A_2(\kappa)\ln(q(|2\gamma| + 2)).$$

Отсюда, как и для комплексных характеров, получаем

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - \mathrm{Re}\,(4\frac{L'}{L}(\sigma + i\gamma; \chi) - \frac{L'}{L}(\sigma + 2i\gamma; \chi^2)) \leq \frac{3}{\sigma - 1} - \frac{4}{\sigma - \beta} + C\ln(q(|\gamma| + 2)$$

для некоторого $C = C(\kappa) > 0$, что и приводит к требуемому неравенству.

2. Комплексные характеры/комплексные нули

Если же $|\gamma|$ мало, то есть $|\gamma| \le \frac{\kappa}{\ln q}$, то нам потребуется немного другой аргумент.

2. Комплексные характеры/комплексные нули

Если же $|\gamma|$ мало, то есть $|\gamma| \leq \frac{\kappa}{\ln q}$, то нам потребуется немного другой аргумент. Заметим сперва, что так как χ — вещественный характер, то из $L(\beta + i\gamma; \chi) = 0$ следует, что $\beta - i\gamma$ — также нуль $L(s; \chi)$. Следовательно, в оценке для логарифмической производной можно учесть оба нуля (так как $\gamma \neq 0$):

2. Комплексные характеры/комплексные нули

Если же $|\gamma|$ мало, то есть $|\gamma| \leq \frac{\kappa}{\ln q}$, то нам потребуется немного другой аргумент. Заметим сперва, что так как χ — вещественный характер, то из $L(\beta + i\gamma; \chi) = 0$ следует, что $\beta - i\gamma$ — также нуль $L(s; \chi)$. Следовательно, в оценке для логарифмической производной можно учесть оба нуля (так как $\gamma \neq 0$):

$$-\frac{L'}{L}(\sigma; \chi) \leq -\frac{1}{\sigma - \beta - i\gamma} - \frac{1}{\sigma - \beta + i\gamma} + A \ln q.$$

Так как $\chi(n) \geq -1$, получаем

Если же $|\gamma|$ мало, то есть $|\gamma| \leq \frac{\kappa}{\ln q}$, то нам потребуется немного другой аргумент. Заметим сперва, что так как χ — вещественный характер, то из $L(\beta + i\gamma; \chi) = 0$ следует, что $\beta - i\gamma$ — также нуль $L(s; \chi)$. Следовательно, в оценке для логарифмической производной можно учесть оба нуля (так как $\gamma \neq 0$):

$$-\frac{L'}{L}(\sigma; \chi) \leq -\frac{1}{\sigma - \beta - i\gamma} - \frac{1}{\sigma - \beta + i\gamma} + A \ln q.$$

Так как $\chi(n) \geq -1$, получаем

$$-\frac{1}{\sigma - 1} + c \leq \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq -\frac{L'}{L}(\sigma; \chi) \leq -\frac{1}{\sigma - \beta - i\gamma} - \frac{1}{\sigma - \beta + i\gamma} + A \ln q.$$

Если же $|\gamma|$ мало, то есть $|\gamma| \leq \frac{\kappa}{\ln q}$, то нам потребуется немного другой аргумент. Заметим сперва, что так как χ — вещественный характер, то из $L(\beta + i\gamma; \chi) = 0$ следует, что $\beta - i\gamma$ — также нуль $L(s; \chi)$. Следовательно, в оценке для логарифмической производной можно учесть оба нуля (так как $\gamma \neq 0$):

$$-\frac{L'}{L}(\sigma; \chi) \leq -\frac{1}{\sigma - \beta - i\gamma} - \frac{1}{\sigma - \beta + i\gamma} + A \ln q.$$

Так как $\chi(n) \geq -1$, получаем

$$-\frac{1}{\sigma - 1} + c \leq \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq -\frac{L'}{L}(\sigma; \chi) \leq -\frac{1}{\sigma - \beta - i\gamma} - \frac{1}{\sigma - \beta + i\gamma} + A \ln q.$$

То есть для некоторого $A_3 > 0$

$$\frac{1}{\sigma - 1} - \frac{2(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + \gamma^2} \geq -A_3 \ln q.$$

Выбирая $\sigma = 1 + \frac{2\kappa}{\ln q}$, получим $\sigma - \beta \geq \sigma - 1 \geq 2|\gamma|$, откуда

$$\frac{2(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + \gamma^2} \geq \frac{1.6}{\sigma - \beta},$$

что приводит к неравенству

2. Комплексные характеры/комплексные нули

Выбирая $\sigma = 1 + \frac{2\kappa}{\ln q}$, получим $\sigma - \beta \geq \sigma - 1 \geq 2|\gamma|$, откуда

$$\frac{2(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2} \geq \frac{1.6}{\sigma-\beta},$$

что приводит к неравенству

$$\frac{1}{\sigma-1} - \frac{1.6}{\sigma-\beta} \geq -A_3 \ln q.$$

Выбирая $\sigma = 1 + \frac{2\kappa}{\ln q}$, получим $\sigma - \beta \geq \sigma - 1 \geq 2|\gamma|$, откуда

$$\frac{2(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + \gamma^2} \geq \frac{1.6}{\sigma - \beta},$$

что приводит к неравенству

$$\frac{1}{\sigma - 1} - \frac{1.6}{\sigma - \beta} \geq -A_3 \ln q.$$

Выбор $\kappa = \frac{1}{4A_3}$ в данном случае приводит к неравенству

$$\beta \leq 1 - \frac{1}{30 A_3 \ln q},$$

что и завершает доказательство Теоремы 1.

3. Нули Зигеля

Теперь нам нужно доказать Теорему 2, в которой мы имеем дело исключительно с вещественными нулями L-функций вещественных характеров. Завершим сначала доказательство теоремы с прошлой лекции:

3. Нули Зигеля

Теперь нам нужно доказать Теорему 2, в которой мы имеем дело исключительно с вещественными нулями L-функций вещественных характеров. Завершим сначала доказательство теоремы с прошлой лекции:

Утверждение 1

Для любого вещественного примитивного характера χ выполнено

$$L(1, \chi) \neq 0.$$

3. Нули Зигеля

Теперь нам нужно доказать Теорему 2, в которой мы имеем дело исключительно с вещественными нулями L-функций вещественных характеров. Завершим сначала доказательство теоремы с прошлой лекции:

Утверждение 1

Для любого вещественного примитивного характера χ выполнено

$$L(1, \chi) \neq 0.$$

Для доказательства нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1

При $x > 0$ выполнено равенство

$$W(x) := \sum_{n \le x} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + \zeta(1/2) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Это утверждение мы обсуждали на второй лекции.

Следующая лемма о суммах характеров также получается из суммирования по частям:

Лемма 2

Пусть f — любая монотонно невозрастающая стремящаяся к нулю функция на луче $(x,+\infty)$, $x \geq 0$, $y \geq x$ и χ — примитивный квадратичный характер по модулю q. Тогда

$$\sum_{x<n\leq y} \chi(n) f(n) \ll |f(x)|\sqrt{q}\ln q.$$

Следующая лемма о суммах характеров также получается из суммирования по частям:

Лемма 2

Пусть f — любая монотонно невозрастающая стремящаяся к нулю функция на луче $(x, +\infty)$, $x \geq 0$, $y \geq x$ и χ — примитивный квадратичный характер по модулю q. Тогда

$$\sum_{x<n\leq y} \chi(n) f(n) \ll |f(x)| \sqrt{q} \ln q.$$

В самом деле, если $S_\chi(t; x) = \sum_{x<n\leq t} \chi(n)$, то

$$|\sum_{x<n\leq y} \chi(n) f(n)| = |\sum_{x<n\leq y} (f(n) - f(n+1)) S_\chi(n) + S_\chi([y]) f([y]+1) \ll$$

$$\ll f(x) \sqrt{q} \ln q$$

что и требовалось.

Из этого получается ряд следствий:

Следствие 1

$$L'(\sigma;\chi) = -\left(\sum_{n\le q} + \sum_{n>q}\right)\frac{\chi(n)\ln n}{n^{\sigma}} \ll \ln^2 q$$

при $1-\sigma \ll \frac{1}{\ln q}$.

Из этого получается ряд следствий:

Следствие 1

$$L'(\sigma;\chi) = -\left(\sum_{n\le q} + \sum_{n>q}\right)\frac{\chi(n)\ln n}{n^\sigma} \ll \ln^2 q$$

при $1-\sigma \ll \frac{1}{\ln q}$.

Следствие 2

При тех же условиях на σ,

$$L(\sigma;\chi) \ll \ln q.$$

Из этого получается ряд следствий:

Следствие 1

$$L'(\sigma;\chi) = -\left(\sum_{n\le q} + \sum_{n>q}\right)\frac{\chi(n)\ln n}{n^\sigma} \ll \ln^2 q$$

при $1-\sigma \ll \frac{1}{\ln q}$.

Следствие 2

При тех же условиях на σ,

$$L(\sigma;\chi) \ll \ln q.$$

Следствие 3

$$W_\chi(x) := \sum_{n\le x}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = L(1/2;\chi) - \sum_{n>x}\frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} = L(1/2;\chi) + O\left(\frac{\sqrt{q}\ln q}{\sqrt{x}}\right).$$

Пусть теперь $f_\chi(n) = (1 * \chi)(n)$. Легко проверить, что для всех простых чисел p выполнено $(1 * \chi)(p^k) \geq 0$, а также $(1 * \chi)(p^{2k}) \geq 1$.

3. Нули Зигеля

Пусть теперь $f_\chi(n) = (1 * \chi)(n)$. Легко проверить, что для всех простых чисел p выполнено $(1 * \chi)(p^k) \geq 0$, а также $(1 * \chi)(p^{2k}) \geq 1$. Тогда

$$\ln x \ll \sum_{n \leq x} \frac{f_\chi(n)}{\sqrt{n}} = \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n}} W_\chi\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} W\left(\frac{x}{n}\right) - W_\chi(\sqrt{x}) W(\sqrt{x}).$$

Пусть теперь $f_\chi(n) = (1 * \chi)(n)$. Легко проверить, что для всех простых чисел p выполнено $(1 * \chi)(p^k) \geq 0$, а также $(1 * \chi)(p^{2k}) \geq 1$. Тогда

$$\ln x \ll \sum_{n \leq x} \frac{f_\chi(n)}{\sqrt{n}} = \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n}} W_\chi\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} W\left(\frac{x}{n}\right) - W_\chi(\sqrt{x}) W(\sqrt{x}).$$

Пользуясь следствием 3 и леммой 2, получаем

$$\sum_{n \leq x} \frac{f_\chi(n)}{\sqrt{n}} = 2L(1;\chi)\sqrt{x} + O(\sqrt{q}\ln q),$$

откуда и следует, что $L(1;\chi) \neq 0$.

Пусть теперь $f_\chi(n) = (1 * \chi)(n)$. Легко проверить, что для всех простых чисел p выполнено $(1 * \chi)(p^k) \geq 0$, а также $(1 * \chi)(p^{2k}) \geq 1$. Тогда

$$\ln x \ll \sum_{n \leq x} \frac{f_\chi(n)}{\sqrt{n}} = \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{n}} W_\chi\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{\sqrt{n}} W\left(\frac{x}{n}\right) - W_\chi(\sqrt{x}) W(\sqrt{x}).$$

Пользуясь следствием 3 и леммой 2, получаем

$$\sum_{n \leq x} \frac{f_\chi(n)}{\sqrt{n}} = 2L(1;\chi)\sqrt{x} + O(\sqrt{q}\ln q),$$

откуда и следует, что $L(1;\chi) \neq 0$.
Докажем теперь единственность исключительного вещественного нуля.

Теорема 3

Пусть χ_1 *и* χ_2 *— примитивные квадратичные характеры по модулям* q_1 *и* q_2*, а* β_i *— вещественные нули* $L(s,\chi_i)$*. Если* $\chi_1 \neq \chi_2$ *или* $\beta_1 \neq \beta_2$*, то*

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c}{\ln q_1 q_2}.$$

Теорема 3

Пусть χ_1 *и* χ_2 *— примитивные квадратичные характеры по модулям* q_1 *и* q_2*, а* β_i *— вещественные нули* $L(s, \chi_i)$*. Если* $\chi_1 \neq \chi_2$ *или* $\beta_1 \neq \beta_2$*, то*

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c}{\ln q_1 q_2}.$$

Если характеры χ_i совпадают, то $\beta_1 \neq \beta_2$ и, следовательно, при $1/2 \leq \sigma \leq 2$

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1) \leq A \ln q_1 - \frac{1}{\sigma - \beta_1} - \frac{1}{\sigma - \beta_2}.$$

3. Нули Зигеля

Теорема 3

Пусть χ_1 и χ_2 — примитивные квадратичные характеры по модулям q_1 и q_2, а β_i — вещественные нули $L(s,\chi_i)$. Если $\chi_1 \neq \chi_2$ или $\beta_1 \neq \beta_2$, то

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c}{\ln q_1 q_2}.$$

Если характеры χ_i совпадают, то $\beta_1 \neq \beta_2$ и, следовательно, при $1/2 \leq \sigma \leq 2$

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1) \leq A \ln q_1 - \frac{1}{\sigma - \beta_1} - \frac{1}{\sigma - \beta_2}.$$

Далее, так как

$$-\frac{1}{\sigma - 1} + c \leq \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq -\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1),$$

то

Теорема 3

Пусть χ_1 *и* χ_2 *— примитивные квадратичные характеры по модулям* q_1 *и* q_2, *а* β_i *— вещественные нули* $L(s,\chi_i)$. *Если* $\chi_1 \neq \chi_2$ *или* $\beta_1 \neq \beta_2$, *то*

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c}{\ln q_1 q_2}.$$

Если характеры χ_i совпадают, то $\beta_1 \neq \beta_2$ и, следовательно, при $1/2 \leq \sigma \leq 2$

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1) \leq A \ln q_1 - \frac{1}{\sigma - \beta_1} - \frac{1}{\sigma - \beta_2}.$$

Далее, так как

$$-\frac{1}{\sigma - 1} + c \leq \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq -\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1),$$

то

$$\frac{1}{\sigma - 1} - \frac{2}{\sigma - \min(\beta_1, \beta_2)} \geq -A_3 \ln q_1,$$

откуда и получаем требуемое неравенство.

Замечание 1

Вышеизложенное доказательство также работает в случае, когда β *является кратным нулём* $L(s,\chi)$.

Замечание 1

Вышеизложенное доказательство также работает в случае, когда β является кратным нулём $L(s,\chi)$.

Если же $\chi_1 \neq \chi_2$, то характер $\chi_1\chi_2$ является нетривиальным квадратичным характером, откуда

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1\chi_2) \leq A\ln(q_1q_2).$$

Замечание 1

Вышеизложенное доказательство также работает в случае, когда β является кратным нулём $L(s,\chi)$.

Если же $\chi_1 \neq \chi_2$, то характер $\chi_1\chi_2$ является нетривиальным квадратичным характером, откуда

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_1\chi_2) \leq A\ln(q_1q_2).$$

Кроме того,

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma-1} + c$$

и

$$-\frac{L'}{L}(\sigma, \chi_i) \leq A\ln q_i - \frac{1}{\sigma-\beta_i}.$$

Замечание 1

Вышеизложенное доказательство также работает в случае, когда β является кратным нулём $L(s,\chi)$.

Если же $\chi_1 \neq \chi_2$, то характер $\chi_1\chi_2$ является нетривиальным квадратичным характером, откуда

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_1\chi_2) \leq A\ln(q_1q_2).$$

Кроме того,

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma-1}+c$$

и

$$-\frac{L'}{L}(\sigma,\chi_i) \leq A\ln q_i - \frac{1}{\sigma-\beta_i}.$$

Заметим теперь, что для любого m выполнено неравенство $0 \leq (1+\chi_1(m))(1+\chi_2(m)) = 1+\chi_1(m)+\chi_2(m)+\chi_1(m)\chi_2(m)$.

3. Нули Зигеля

Из этого соотношения следует, что при $\sigma > 1$ выполнено

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - \frac{L'}{L}(\sigma;\chi_1) - \frac{L'}{L}(\sigma;\chi_2) - \frac{L'}{L}(\sigma;\chi_1\chi_2) \geq 0.$$

3. Нули Зигеля

Из этого соотношения следует, что при $\sigma > 1$ выполнено

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - \frac{L'}{L}(\sigma;\chi_1) - \frac{L'}{L}(\sigma;\chi_2) - \frac{L'}{L}(\sigma;\chi_1\chi_2) \geq 0.$$

Пользуясь полученными неравенствами, выводим

$$\frac{1}{\sigma-1} - \frac{2}{\sigma - \min(\beta_1,\beta_2)} \geq -A_3\ln(q_1 q_2),$$

откуда и получаем требуемое неравенство, что и завершает доказательство Теоремы 3.

3. Нули Зигеля

Из этого соотношения следует, что при $\sigma > 1$ выполнено

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - \frac{L'}{L}(\sigma;\chi_1) - \frac{L'}{L}(\sigma;\chi_2) - \frac{L'}{L}(\sigma;\chi_1\chi_2) \geq 0.$$

Пользуясь полученными неравенствами, выводим

$$\frac{1}{\sigma - 1} - \frac{2}{\sigma - \min(\beta_1, \beta_2)} \geq -A_3 \ln(q_1 q_2),$$

откуда и получаем требуемое неравенство, что и завершает доказательство Теоремы 3.
Докажем теперь вторую часть Теоремы 2.

Теорема 4

Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $c(\varepsilon) > 0$ такое, что из $L(\beta, \chi) = 0$ для вещественного примитивного характера χ по модулю q следует

$$\beta \leq 1 - c(\varepsilon) q^{-\varepsilon}.$$

Доказательство Теоремы 4 будет следовать из леммы Эстермана:

Лемма 3

Пусть χ_1 *и* χ_2 *— различные вещественные характеры по модулям* q_1 *и* q_2*, определим*

$$F(s) = \zeta(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_1\chi_2).$$

Тогда при $0.9 < \sigma < 1$ *выполнено неравенство*

$$F(\sigma) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1-\sigma}(q_1q_2)^{7(1-\sigma)},$$

где $\lambda = L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)L(1,\chi_1\chi_2)$.

Доказательство Теоремы 4 будет следовать из леммы Эстермана:

Лемма 3

Пусть χ_1 *и* χ_2 *— различные вещественные характеры по модулям* q_1 *и* q_2*, определим*

$$F(s) = \zeta(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_1\chi_2).$$

Тогда при $0.9 < \sigma < 1$ *выполнено неравенство*

$$F(\sigma) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1-\sigma}(q_1q_2)^{7(1-\sigma)},$$

где $\lambda = L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)L(1,\chi_1\chi_2)$.

Заметим сначала, что

$$-\frac{F'}{F}(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{L'}{L}(s;\chi_1) - \frac{L'}{L}(s;\chi_2) - \frac{L'}{L}(s;\chi_1\chi_2)$$

— ряд Дирихле с положительными коэффициентами.

Отсюда следует, что ряд Дирихле $F(s)$ также имеет положительные коэффициенты. Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

где $b_n \geq 0$ и $b_1 = 1$.

Отсюда следует, что ряд Дирихле $F(s)$ также имеет положительные коэффициенты. Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

где $b_n \geq 0$ и $b_1 = 1$. Разложим $F(s)$ в ряд Тейлора в окрестности $s = 2$:

$$F(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m (2-s)^m.$$

Отсюда следует, что ряд Дирихле $F(s)$ также имеет положительные коэффициенты. Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^s},$$

где $b_n \geq 0$ и $b_1 = 1$. Разложим $F(s)$ в ряд Тейлора в окрестности $s = 2$:

$$F(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m (2-s)^m.$$

Заметим, что коэффициенты a_m неотрицательны:

$$a_m = \frac{(-1)^m}{m!} F^{(m)}(2) = \frac{(-1)^m}{m!} \sum \frac{b_n}{n^2} (\ln n)^m (-1)^m \geq 0.$$

Отсюда следует, что ряд Дирихле $F(s)$ также имеет положительные коэффициенты. Пусть

$$F(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n^s},$$

где $b_n \geq 0$ и $b_1=1$. Разложим $F(s)$ в ряд Тейлора в окрестности $s=2$:

$$F(s)=\sum_{m=0}^{+\infty}a_m(2-s)^m.$$

Заметим, что коэффициенты a_m неотрицательны:

$$a_m=\frac{(-1)^m}{m!}F^{(m)}(2)=\frac{(-1)^m}{m!}\sum\frac{b_n}{n^2}(\ln n)^m(-1)^m\geq 0.$$

Кроме того, $a_1\geq b_1/1^2=1$.

3. Нули Зигеля

Рассмотрим теперь функцию $f(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1}$. $f(s)$ — целая функция, поэтому её разложение Тейлора сходится в круге $|s-2| \leq \frac{3}{2}$:

3. Нули Зигеля

Рассмотрим теперь функцию $f(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1}$. $f(s)$ — целая функция, поэтому её разложение Тейлора сходится в круге $|s-2| \le \frac{3}{2}$:

$$f(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = F(s) - \lambda \sum (2-s)^m = \sum_m (a_m - \lambda)(2-s)^m.$$

3. Нули Зигеля

Рассмотрим теперь функцию $f(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1}$. $f(s)$ — целая функция, поэтому её разложение Тейлора сходится в круге $|s-2| \leq \frac{3}{2}$:

$$f(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = F(s) - \lambda \sum (2-s)^m = \sum_m (a_m - \lambda)(2-s)^m.$$

На границе данного круга имеем
$\zeta(s) = O(1), L(s,\chi_1) = O(q_1), L(s,\chi_2) = O(q_2)$ и
$L(s,\chi_1\chi_2) = O(q_1q_2)$. Кроме того, $\lambda/(s-1) = O(\lambda) = O((q_1q_2)^2)$.

3. Нули Зигеля

Рассмотрим теперь функцию $f(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1}$. $f(s)$ — целая функция, поэтому её разложение Тейлора сходится в круге $|s-2| \le \frac{3}{2}$:

$$f(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = F(s) - \lambda \sum (2-s)^m = \sum_m (a_m - \lambda)(2-s)^m.$$

На границе данного круга имеем $\zeta(s) = O(1), L(s,\chi_1) = O(q_1), L(s,\chi_2) = O(q_2)$ и $L(s,\chi_1\chi_2) = O(q_1q_2)$. Кроме того, $\lambda/(s-1) = O(\lambda) = O((q_1q_2)^2)$. Из теоремы Коши получаем

$$|a_m - \lambda| = \frac{1}{2\pi}\left|\int \frac{f(s)}{s^{m+1}} ds\right| \ll (q_1q_2)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

3. Нули Зигеля

Выберем натуральный параметр $M > 1$ и $0.9 < \sigma < 1$. Оценим сумму по $m \geq M$ ряда Тейлора для $f(s)$:

Выберем натуральный параметр $M > 1$ и $0.9 < \sigma < 1$. Оценим сумму по $m \geq M$ ряда Тейлора для $f(s)$:

$$\left|\sum_{m=M}^{+\infty}(a_m-\lambda)(2-\sigma)^m\right| \leq \sum_{m\geq M} c_2(q_1q_2)^2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{10}\right)^m < c_3(q_1q_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M$$

3. Нули Зигеля

Выберем натуральный параметр $M > 1$ и $0.9 < \sigma < 1$. Оценим сумму по $m \geq M$ ряда Тейлора для $f(s)$:

$$\left|\sum_{m=M}^{+\infty} (a_m - \lambda)(2-\sigma)^m\right| \leq \sum_{m\geq M} c_2(q_1q_2)^2 \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{10}\right)^m < c_3(q_1q_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M$$

Так как $a_m \geq 0$ и $a_1 \geq 1$, получаем

$$F(\sigma) - \frac{\lambda}{\sigma-1} \geq 1 - \lambda\sum_{m=0}^{M-1}(2-\sigma)^m - c_3(q_1q_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M =$$

$$= 1 - \lambda\frac{(2-\sigma)^M - 1}{1-\sigma} - c_3(q_1q_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M.$$

Выберем натуральный параметр $M > 1$ и $0.9 < \sigma < 1$. Оценим сумму по $m \geq M$ ряда Тейлора для $f(s)$:

$$\left|\sum_{m=M}^{+\infty}(a_m - \lambda)(2-\sigma)^m\right| \leq \sum_{m\geq M} c_2(q_1q_2)^2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{10}\right)^m < c_3(q_1q_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M$$

Так как $a_m \geq 0$ и $a_1 \geq 1$, получаем

$$F(\sigma) - \frac{\lambda}{\sigma-1} \geq 1 - \lambda\sum_{m=0}^{M-1}(2-\sigma)^m - c_3(q_1q_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M =$$

$$= 1 - \lambda\frac{(2-\sigma)^M - 1}{1-\sigma} - c_3(q_1q_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M.$$

Выберем теперь M так, что
$c_3(q_1q_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^M < \frac{1}{2} \leq c_3(q_1q_2)^2\left(\frac{11}{15}\right)^{M-1}$.

3. Нули Зигеля

Тогда $M < 2\frac{\ln(q_1 q_2)}{\ln\frac{15}{11}} + c < 7\ln q_1 q_2 + c$ и

Тогда $M < 2\frac{\ln(q_1 q_2)}{\ln\frac{15}{11}} + c < 7\ln q_1 q_2 + c$ и

$$F(\sigma) \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{1-\sigma}(2-\sigma)^M.$$

Тогда $M < 2\frac{\ln(q_1q_2)}{\ln\frac{15}{11}} + c < 7\ln q_1q_2 + c$ и

$$F(\sigma) \geq \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{1-\sigma}(2-\sigma)^M.$$

Заметим теперь, что

$$(2-\sigma)^M = (1+1-\sigma)^M < e^{M(1-\sigma)} < c_4(q_1q_2)^{7(1-\sigma)},$$

откуда и получаем требуемое неравенство.

3. Нули Зигеля

Докажем теперь Теорему 4 и, тем самым, Теорему 2. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Может реализоваться два различных случая:

3. Нули Зигеля

Докажем теперь Теорему 4 и, тем самым, Теорему 2. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Может реализоваться два различных случая:
Случай 1: все вещественные нули β функций $L(s, \chi)$ для вещественных характеров χ удовлетворяют неравенству $\beta < 1 - \frac{\varepsilon}{8}$. Тогда Теорема 4 доказана.

3. Нули Зигеля

Докажем теперь Теорему 4 и, тем самым, Теорему 2. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Может реализоваться два различных случая:
Случай 1: все вещественные нули β функций $L(s,\chi)$ для вещественных характеров χ удовлетворяют неравенству $\beta < 1 - \frac{\varepsilon}{8}$.
Тогда Теорема 4 доказана.
Случай 2: существует характер χ_1 и $\beta_1 > 1 - 0.125\varepsilon$ такое, что $L(\beta_1, \chi_1) = 0$. Пусть теперь $\chi \neq \chi_1$ — любой квадратичный характер по модулю q. Применим лемму 3 для χ_1 и χ:

Докажем теперь Теорему 4 и, тем самым, Теорему 2. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Может реализоваться два различных случая:
Случай 1: все вещественные нули β функций $L(s, \chi)$ для вещественных характеров χ удовлетворяют неравенству $\beta < 1 - \frac{\varepsilon}{8}$. Тогда Теорема 4 доказана.
Случай 2: существует характер χ_1 и $\beta_1 > 1 - 0.125\varepsilon$ такое, что $L(\beta_1, \chi_1) = 0$. Пусть теперь $\chi \neq \chi_1$ — любой квадратичный характер по модулю q. Применим лемму 3 для χ_1 и χ: если $F(s) = \zeta(s)L(s, \chi_1)L(s, \chi)L(s, \chi_1\chi)$, то

$$0 = F(\beta_1) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1 - \beta_1}(q_1 q)^{7(1-\beta_1)} \geq \frac{1}{2} - c(\varepsilon)\lambda q^{7\varepsilon/8}.$$

3. Нули Зигеля

Докажем теперь Теорему 4 и, тем самым, Теорему 2. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Может реализоваться два различных случая:
Случай 1: все вещественные нули β функций $L(s, \chi)$ для вещественных характеров χ удовлетворяют неравенству $\beta < 1 - \frac{\varepsilon}{8}$. Тогда Теорема 4 доказана.
Случай 2: существует характер χ_1 и $\beta_1 > 1 - 0.125\varepsilon$ такое, что $L(\beta_1, \chi_1) = 0$. Пусть теперь $\chi \neq \chi_1$ — любой квадратичный характер по модулю q. Применим лемму 3 для χ_1 и χ: если $F(s) = \zeta(s)L(s, \chi_1)L(s, \chi)L(s, \chi_1\chi)$, то

$$0 = F(\beta_1) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1 - \beta_1}(q_1 q)^{7(1-\beta_1)} \geq \frac{1}{2} - c(\varepsilon)\lambda q^{7\varepsilon/8}.$$

Следовательно, для некоторого $c_1(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$L(1, \chi)L(1, \chi_1)L(1, \chi_1\chi) \geq c_1(\varepsilon)q^{-7\varepsilon/8}.$$

3. Нули Зигеля

Докажем теперь Теорему 4 и, тем самым, Теорему 2. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Может реализоваться два различных случая:
Случай 1: все вещественные нули β функций $L(s, \chi)$ для вещественных характеров χ удовлетворяют неравенству $\beta < 1 - \frac{\varepsilon}{8}$. Тогда Теорема 4 доказана.
Случай 2: существует характер χ_1 и $\beta_1 > 1 - 0.125\varepsilon$ такое, что $L(\beta_1, \chi_1) = 0$. Пусть теперь $\chi \neq \chi_1$ — любой квадратичный характер по модулю q. Применим лемму 3 для χ_1 и χ: если $F(s) = \zeta(s)L(s, \chi_1)L(s, \chi)L(s, \chi_1\chi)$, то

$$0 = F(\beta_1) > \frac{1}{2} - \frac{c\lambda}{1 - \beta_1}(q_1 q)^{7(1-\beta_1)} \geq \frac{1}{2} - c(\varepsilon)\lambda q^{7\varepsilon/8}.$$

Следовательно, для некоторого $c_1(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$L(1, \chi)L(1, \chi_1)L(1, \chi_1\chi) \geq c_1(\varepsilon)q^{-7\varepsilon/8}.$$

Далее, $L(1, \chi_1) = O(1)$ и $L(1, \chi_1\chi) \ll \ln q$, так что

$$L(1, \chi) \gg c_1(\varepsilon)q^{-7\varepsilon/8}(\ln q)^{-1}.$$

3. Нули Зигеля

Пусть β — нуль L-функции $L(s,\chi)$. Согласно формуле конечных приращений, существует $1 > \nu > \beta$ такое, что

$$L(1,\chi) = L(1,\chi) - L(\beta,\chi) = (1-\beta)L'(\nu,\chi).$$

3. Нули Зигеля

Пусть β — нуль L-функции $L(s,\chi)$. Согласно формуле конечных приращений, существует $1>\nu>\beta$ такое, что

$$L(1,\chi)=L(1,\chi)-L(\beta,\chi)=(1-\beta)L'(\nu,\chi).$$

Если $\beta<1-\frac{c}{\ln q}$, то доказывать нечего. Если же $\beta\geq 1-\frac{c}{\ln q}$, то $L'(\nu,\chi)\ll\ln^2 q$. Откуда

$$1-\beta\gg L(1,\chi)(L'(\nu,\chi))^{-1}\gg c_1(\varepsilon)q^{-7\varepsilon/8}(\ln q)^{-3}\geq c_2(\varepsilon)q^{-\varepsilon},$$

что и требовалось.

4. Теорема Зигеля-Вальфиша

Напомним, что теорема Зигеля-Вальфиша состоит в том, что для любого $A > 0$ существует константа $c(A) > 0$ такая, что для всех $q \le (\ln x)^A$ и $(a, q) = 1$ выполнено

$$\pi(x; q, a) = \frac{Li(x)}{\varphi(q)} + O(xe^{-c(A)\sqrt{\ln x}}).$$

4. Теорема Зигеля-Вальфиша

Напомним, что теорема Зигеля-Вальфиша состоит в том, что для любого $A > 0$ существует константа $c(A) > 0$ такая, что для всех $q \leq (\ln x)^A$ и $(a, q) = 1$ выполнено

$$\pi(x; q, a) = \frac{Li(x)}{\varphi(q)} + O(xe^{-c(A)\sqrt{\ln x}}).$$

Как мы обсуждали ранее, для этого достаточно для всех примитивных характеров χ по модулям $2 < q_1 \leq (\ln x)^A$ доказать оценку

$$\psi(x; \chi) \ll xe^{-c(A)\sqrt{\ln x}}.$$

4. Теорема Зигеля-Вальфиша

Напомним, что теорема Зигеля-Вальфиша состоит в том, что для любого $A > 0$ существует константа $c(A) > 0$ такая, что для всех $q \le (\ln x)^A$ и $(a, q) = 1$ выполнено

$$\pi(x; q, a) = \frac{Li(x)}{\varphi(q)} + O(xe^{-c(A)\sqrt{\ln x}}).$$

Как мы обсуждали ранее, для этого достаточно для всех примитивных характеров χ по модулям $2 < q_1 \le (\ln x)^A$ доказать оценку

$$\psi(x; \chi) \ll xe^{-c(A)\sqrt{\ln x}}.$$

Согласно доказанным выше утверждениям, все нули $\rho = \beta + i\gamma$ соответствующей $L-$функции, кроме, быть может, одного, удовлетворяют неравенству

$$1 - \beta \ge \frac{c}{\ln(q_1(|\gamma| + 2))}.$$

Следовательно, сумму по неисключительным нулям в явной формуле для $\psi(x;\chi)$ можно оценить как

$$\sum_{\substack{\rho \text{ не исключителен} \\ |\mathrm{I}m\rho|\le T}} \frac{x^\rho}{\rho} \ll x\exp(-c\log x/\log(q(T+2)))\log^2(qT).$$

4. Теорема Зигеля-Вальфиша

Следовательно, сумму по неисключительным нулям в явной формуле для $\psi(x;\chi)$ можно оценить как

$$\sum_{\substack{\rho \text{ не исключителен} \\ |\mathrm{Im}\rho|\le T}} \frac{x^\rho}{\rho} \ll x\exp(-c\log x/\log(q(T+2)))\log^2(qT).$$

Выбирая теперь $qT=\exp(c\sqrt{\ln x})$ для некоторой эффективно вычислимой константы $c_1>0$ получаем

$$\psi(x;\chi) = -\delta\frac{x^\beta}{\beta} + O(xe^{-c_1\sqrt{\ln x}}),$$

где $\delta=1$, если исключительный нуль β существует и $\delta=0$ иначе.

Следовательно, сумму по неисключительным нулям в явной формуле для $\psi(x;\chi)$ можно оценить как

$$\sum_{\substack{\rho \text{ не исключителен} \\ |\mathrm{Im}\rho|\le T}} \frac{x^\rho}{\rho} \ll x\exp(-c\log x/\log(q(T+2)))\log^2(qT).$$

Выбирая теперь $qT=\exp(c\sqrt{\ln x})$ для некоторой эффективно вычислимой константы $c_1>0$ получаем

$$\psi(x;\chi)=-\delta\frac{x^\beta}{\beta}+O(xe^{-c_1\sqrt{\ln x}}),$$

где $\delta=1$, если исключительный нуль β существует и $\delta=0$ иначе. Воспользуемся теперь Теоремой 2 для $\varepsilon=\frac{1}{2A}$. Получим $1-\beta\ge c(1/2A)q_1^{-\varepsilon}\ge c(1/2A)/\sqrt{\ln x}$, откуда

$$-\frac{x^\beta}{\beta}\ll x\exp(-c(1/2A)\sqrt{\ln x}),$$

что и завершает доказательство теоремы Зигеля-Вальфиша.

Спасибо за внимание!