

**Задача 1.** Найти, с точностью до изоморфизма, все коды (не обязательно линейные) типа  $f : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{B}_2^5$ , исправляющие одну ошибку.

**Ответ:**

3 класса эквивалентности кодов:

00 $\mapsto$ 00000	00 $\mapsto$ 00000	00 $\mapsto$ 00000
01 $\mapsto$ 11110	01 $\mapsto$ 11001	01 $\mapsto$ 11001
10 $\mapsto$ 11001	10 $\mapsto$ 11110	10 $\mapsto$ 00111
11 $\mapsto$ 00111	11 $\mapsto$ 00111	11 $\mapsto$ 11110

**Решение:** С помощью параллельного переноса сделаем так, что  $f(00) = 00000$ . Код исправляет одну ошибку. Значит, расстояние между двумя любыми словами должно быть хотя бы 3. Следовательно, в остальных трёх словах должно быть хотя бы 3 единицы.

*Нет слова весом 5.* Пусть в каком-то слове 5 единиц. Тогда в остальных словах не более двух единиц (т.к. расстояние с этим словом должно быть хотя бы 3). Но такого не может быть, так как в них при этом должно быть хотя бы 3 единицы.

*Нет двух слов весом 4.* Если есть два слова весом 4, то хотя бы на трех местах и в первом и во втором слове одновременно стоят единицы. Тогда расстояние между этими двумя словами не больше 2, а должно быть хотя бы 3.

*Нет трех слов весом 3.* Если есть два слова весом 3, то у них должно быть ровно одно место, где у обоих слов единица (иначе расстояние между ними 2 или меньше). А для трех слов такое условие выполнится не может.

Таким образом в коде ровно одно слово веса 4 и два слова веса 3.

Пусть  $f(01)$  — слово веса 4. Тогда код в первом классе эквивалентности, написанном в ответе. Перестановкой столбцов добьемся  $f(01) = 11110$ .  $f(10)$  и  $f(11)$  — слова веса 3. При этом на последнем месте в этих словах должны быть единицы, иначе расстояние со словом 11110 будет 1. Кроме того, единицы и нули на первых четырех местах в словах  $f(10)$  и  $f(11)$  на разных позициях. Перестановкой первых четырех столбцов можем получить  $f(10) = 11001$ ,  $f(11) = 00111$ .

Аналогичным образом получим, что код лежит во втором классе эквивалентности, если  $f(10)$  — слово веса 4, а если  $f(11)$  — слово веса 4, то в третьем.

**Предложение 1.** Существует единственный с точностью до изоморфизма и перестановок строк совершенный код  $f : \mathbb{F}_2^4 \rightarrow \mathbb{B}_2^7$ , исправляющий одну ошибку.

Этот код (справа показана нумерация перебора):

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	2
0	0	1	1	1	1	0	
0	1	0	0	1	1	0	3
0	1	0	1	1	0	1	
0	1	1	0	0	1	1	
0	1	1	1	0	0	0	5
1	0	0	0	1	1	1	
1	0	0	1	1	0	0	4
1	0	1	0	0	1	0	6
1	0	1	1	0	0	1	
1	1	0	0	0	0	1	7
1	1	0	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	0	0	
1	1	1	1	1	1	1	

**Решение:** 0. С помощью параллельного переноса сделаем так, что одна из строк будет 0000000.

Код исправляет одну ошибку. Значит, расстояние между двумя любыми словами должно быть хотя бы 3. Следовательно, в остальных трёх словах должно быть хотя бы 3 единицы. Код совершенный, значит слово с двумя единицами должно быть в каком-то шаре с центром с весом 3. Любые две строки веса 3 пересекаются не более чем по одной единице.

1. Слово 0000011 в каком-то шаре. Перестановкой столбцов добьемся, чтобы центром шара было 0001011.

2. Слово 0000101 в каком-то шаре. Перестановкой столбцов добьемся, чтобы центром шара было 0010101 (на 4 и 6 месте обязан быть ноль, иначе слишком маленькое расстояние до прошлого центра).

3. Слово 0000110 в каком-то шаре. Перестановкой столбцов добьемся, чтобы центром шара было 0100110. (На 4 и 6 месте обязан быть ноль, иначе слишком маленькое расстояние до первого центра. На 3 и 5 месте обязан быть ноль, иначе слишком маленькое расстояние до второго центра.)

4. Слово 0001100 в каком-то шаре. Посмотрим, где может быть его центр. На 6, 7, 3, 2 месте обязан быть ноль, иначе слишком маленькое расстояние до первого, второго или третьего центра. Тогда центр 1001100.

5. Слово 0011000 в каком-то шаре. Посмотрим, где может быть его центр. На 6, 7, 5, 1 месте обязан быть ноль, иначе слишком маленькое расстояние до первого или четвертого центра. Тогда центр 0111000.

6. Слово 0010010 в шаре с центром 1010010 (иначе проблема с первым или третьим центром).

7. Слово 1100000 в шаре с центром 1100001 (иначе проблема с четвертым или шестым центром).

Получили все сторки веса 3. Большие строк веса 3 не может быть, так как любые две строки веса 3 пересекаются не более чем по одной единице.

Далее все строки веса 4 будем получать одним и тем же методом. Слово с тремя единицами, не совпадающее ни с каким центром должно лежать в каком-то шаре. Центров веса 2 нет, то есть в шаре с центром веса 4. Центр веса 4 и веса 3 пересекаются не более чем по двум единицам. Есть 3 центра веса 3, пересекающихся со словом с тремя единицами по двум единицам. Тогда однозначно определяется центр веса 4, потому что 3 центра веса 3 запрещают 3 места для единицы.

Пример: слово 1110000 в каком-то шаре с центром веса 4. Ещё есть центры 0111000, 1010010, 1100001. Тогда на 4, 6 и 7 месте нули. Тогда центр в 1110100.

Для остальных слов веса 4 аналогично однозначно восстанавливается последняя единица.

Далее слово веса 6 должно где-то лежать (центра веса 5 или 6 не может быть из-за маленького расстояния до слова веса 4.) Тогда есть слово веса 7.

Код построен.