Распределение простых чисел
Листок 1
Эти задачи будут приносить на 40% меньше баллов после 31 октября.

1. (0.2 б) Докажите, что для $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$ выполнено неравенство

$$|\zeta(s)| \geq \zeta(\sigma)^{-1}.$$

2. Докажите равенства

   а) (0.1 б)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)^2}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

   б) (0.1 б)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)}$$

   в) (0.1 б)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)^2}{n^s} = \frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)}$$

   г) (0.1 б)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)^2}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)^2\zeta(s-2)}{\zeta(2s-2)}$$

3. (0.2 б) Покажите, что все вещественные нули $\zeta(s)$ тривиальны (т.е. равны $-2n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$).
4. Докажите, что для любого $x \geq 1$ выполнено

   а) (0.1 б)
$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = 1$$

   б) (0.2 б)
$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq 1$$

5. Пусть $M(x) = \sum\limits_{n \leq x} \mu(n)$ и $L(x) = \sum\limits_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n}$.

   а) (0.2 б) При помощи суммирования по частям покажите, что из $L(x) = o(1)$ при $x \to +\infty$ следует, что $M(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$.

б) (0.3 б) Покажите, что для любого $N \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n \leq x/N} \mu(n) \left(\frac{x}{n} - \left\{\frac{x}{n}\right\}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} k \left(M\left(\frac{x}{k}\right) - M\left(\frac{x}{k+1}\right)\right)$$

Выбрав достаточно большое N, покажите, что из $M(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$ следует, что $L(x) = o(1)$ при $x \to +\infty$.

6. а) (0.2 б) Пусть f и g — произвольные арифметические функции. Докажите, что для любого $x \geq 1$ и любых y и z с условием $yz = x$ выполнено равенство

$$\sum_{ab \leq x} f(a)g(b) = \sum_{a \leq y} f(a) \sum_{b \leq x/a} g(b) + \sum_{b \leq z} g(b) \sum_{a \leq x/b} f(a) - \sum_{a \leq y} f(a) \cdot \sum_{b \leq z} g(b).$$

б) (0.2 б) Докажите, что

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + cx + O(\sqrt{x})$$

и найдите c.

7. а) (0.2 б) Пусть $a_m = \tau(m) - \ln m$. Покажите, что

$$\sum_{m \leq x} a_m = x(c+1) + O(\sqrt{x})$$

и

$$\sum_{nm \leq x} \mu(n) a_m = [x] - \psi(x) = \sum_{n \leq x} (1 - \Lambda(n)).$$

б) (0.6 б) Покажите, что из $M(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$ следует, что $\psi(x) = x + o(x)$ при $x \to +\infty$.