1)

~~Обозн~~ Обозначения: $G=GL_n$, $B_0\subset G$ — верхнетреугольные, $T_0\subset B_0$ — диагональные, $\mathfrak{g}=Lie(G)$, $\mathfrak{b}_0=Lie(B_0)$, $\mathfrak{h}_0=Lie(T_0)$, $N\subset\mathfrak{g}$ — нильпотенты

Опред. многообразие флагов $\mathcal{B}\subset Gr(\frac{n(n+1)}{2},\mathfrak{g})$ — все разрешимые подалгебры Ли в $\mathfrak{g}$.

Утв. Присоединённое действие G на $\mathcal{B}$ сюръективно, $Stab_G(\mathfrak{b}_0)=B_0$.

Рассматривая касательные отображения для последовательности

$B_0\hookrightarrow G\twoheadrightarrow\mathcal{B}$ имеем $0\to\mathfrak{b}_0\to\mathfrak{g}\to T\mathcal{B}\to 0$, откуда

$T^\vee\mathcal{B}=(\mathfrak{g}/\mathfrak{b}_0)^\vee\cong\mathfrak{b}_0^\perp=\mathfrak{n}_0:=[\mathfrak{b}_0,\mathfrak{b}_0]$. Так что кокасательное расслоение вкладывается в тривиальное $T^\vee\mathcal{B}\overset{i}{\hookrightarrow}\mathfrak{g}\times\mathcal{B}$. Пусть $\tilde{N}=Im(i)=\{(x,\mathfrak{b})\in\mathfrak{g}\times\mathcal{B}\mid x\in\mathfrak{n}\}\subset\mathfrak{g}\times\mathcal{B}$ $(\mathfrak{n}:=[\mathfrak{b},\mathfrak{b}])$. Проекция на первый сомножитель задаёт отображение $\psi:\tilde{N}\to N\subset\mathfrak{g}$.

Утв. ψ — разреш. особенностей.

$\triangleright$ Ясно, что $\tilde{N}$ гладкое и слои проективны (УПР: вложить любой слой в произведение грассманианов). Пусть N^{reg} — множество регулярных нильпотентов $(\dim(Z_{\mathfrak{g}}x)=n)$. Тогда N^{reg} — зариски-открытое в неприводимом $\Rightarrow$ плотно. Над N^{reg} ψ — изоморфизм (УПР: $x\in N^{reg}\Leftrightarrow$ ЖНФ x — одна клетка). $\triangleleft$

Опр. $\mathbb{h}=\mathfrak{b}_0/\mathfrak{n}_0$ — универсальный Картан.

Утв. $\forall\,\mathfrak{b}\in\mathcal{B}$, $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}$ канонически изоморфно $\mathbb{h}$.

Замеч. $\forall$ Картана $\mathfrak{h}$ $\forall$ выбор Бореля $\mathfrak{b}\supset\mathfrak{h}$ задаёт изоморфизм $\mathfrak{h}\xrightarrow{\sim}\mathbb{h}$, но этот изоморфизм зависит от $\mathfrak{b}$.

Опр. $\mathbb{W}\subset GL(\mathbb{h})$ — образ W при изоморфизме $GL(\mathfrak{h})\xrightarrow{\sim}GL(\mathbb{h})$.

Утв. определение корректно (не зависит от выбора пары $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{b}$).

Теор. (Chevalley restriction) Отображение ограничения $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G\xrightarrow{\rho}\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ — изоморфизм.

Замеч. Отображение $\mathbb{C}[\mathfrak{h}/W]\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W\overset{\rho^{-1}}{\cong}\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G\hookrightarrow\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ на спектрах даёт $\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}/W$. Беря композицию с $\mathfrak{h}/W\xrightarrow{\sim}\mathbb{h}/\mathbb{W}$ получаем корректно определённый морфизм $\rho:\mathfrak{g}\to\mathbb{h}/\mathbb{W}$.

2) ОБОЗН. $\mathfrak g^{ss}\subset\mathfrak g$ — полупростые; $\mathfrak g^{reg}$ ($\mathfrak h^{reg}$, $\mathfrak h^{reg}$) — регулярные ($\dim Z_{\mathfrak g}(x)=n$);
$\mathfrak g^{sr}=\mathfrak g^{ss}\cap\mathfrak g^{reg}$; $\tilde{\mathfrak g}=\{(x,\mathfrak b)\in\mathfrak g\times\mathcal B\mid x\in\mathfrak b\}$; $\tilde{\mathfrak g}^{sr}=\tilde{\mathfrak g}\cap(\mathfrak g^{sr}\times\mathcal B)$.

УТВ. Следующая диаграмма коммутативна, где

$$
\begin{tikzcd}
 & & \tilde{\mathfrak g} \arrow[d, phantom, "\cup"] \arrow[ddl, "\mu"'] \arrow[ddrr, bend left, "\nu"] & & \\
\tilde{\mathcal N} \arrow[urr, hook] \arrow[d, "\psi"'] & & \tilde{\mathfrak g}^{sr} \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
\mathcal N \arrow[r, hook] \arrow[dd] & \mathfrak g \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[ddr, "\rho"] & \mathfrak g^{sr} \arrow[d] & \mathfrak h^{reg} \arrow[dl] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathfrak h \arrow[ddll, "\pi"] \\
 & & \mathfrak h^{reg}/W \arrow[d, phantom, "\cap"] & & \\
\{0\} \arrow[rr] & & \mathfrak h/W & &
\end{tikzcd}
$$

μ — проекция на первый сомнож.;
$\nu:(x,\mathfrak b)\longmapsto x+[\mathfrak b,\mathfrak b]\in\mathfrak b/[\mathfrak b,\mathfrak b]\cong\mathfrak h$;
ρ — из замечания;
π — факторизация.

$\mu^{-1}(\mathfrak g^{sr})=\nu^{-1}(\mathfrak h^{reg})=\tilde{\mathfrak g}^{sr}$; 2 квадрата слева — расслоенные произв.

ЗАМЕЧ. $\sigma: G\times_{B_0}\mathfrak b_0\longrightarrow\tilde{\mathfrak g}$, $B_0\cdot(g,x)\mapsto(gxg^{-1}, g\mathfrak b_0 g^{-1})$ — изоморфизм.
$\sigma|_{G\times_{B_0}\mathfrak n_0}: G\times_{B_0}\mathfrak n_0\longrightarrow\tilde{\mathcal N}$ — изоморфизм. Здесь действие
B_0 на $G\times\mathfrak b_0$ — $b(g,x)=(gb^{-1}, bxb^{-1})$.

Упр. Определим действия $G\times\mathbb C^*$ на $\tilde{\mathfrak g}$ и $\mathfrak h$ формулами:
$(g,\lambda)\cdot(x,\mathfrak b)=(\lambda gxg^{-1}, g\mathfrak b g^{-1})$; $(g,\lambda)\cdot(x+\mathfrak n_0)=\lambda gxg^{-1}+g\mathfrak n_0g^{-1}$. Тогда ν — G-эквив.
Пусть $s\in\mathfrak h_0$. Положим $\mathfrak l=Z_{\mathfrak g}(s)$; $L=Z_G(s)$; $B_0^L=B_0\cap L$; $\mathfrak b_0^L=\mathfrak b_0\cap\mathfrak l$; $\mathcal B^L=L/B_0^L$.

Теор. Отображение $G\times_L T^\vee(\mathcal B^L)=G\times_L\{(x,\mathfrak b^L)\in\mathfrak l\times\mathcal B^L\mid x\in\mathfrak n^L\subset\mathfrak b^L\subseteq\mathfrak l\}\xrightarrow{\alpha}\nu^{-1}(s+\mathfrak n_0)$,
$\alpha(g,x,\mathfrak b^L)=(g(x+s)g^{-1}, g\mathfrak b^Lg^{-1}+\mathfrak a)$ — корректно определённый G-эквив.
изоморфизм, где $\mathfrak a=(\mathfrak b_0+\mathfrak l)^\perp\subseteq\mathfrak n_0$.

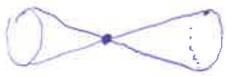
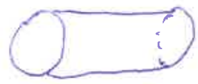
Пример. $s\in\mathfrak h_0^{reg}$. Тогда $\mathfrak l=\mathfrak h_0$; $L=T_0$; $B_0^L=T_0$; $G\times_L T^\vee\mathcal B^L=G/T$.

Док-во: Корректность и G-эквив. — УПР.
Сюръективность: в силу G-эквив., можем выбрать любой элемент из каждой G-орбиты в $\nu^{-1}(s+\mathfrak n_0)$ и показывать, что он лежит в $\mathrm{Im}(\alpha)$. $(x,\mathfrak b)\sim(y,\mathfrak b_0)$. УПР: можно подобрать такой $g\in B_0$, что $gyg^{-1}\in\mathfrak l$. Получаем эл-т $(z,\mathfrak b_0)\in\nu^{-1}(s+\mathfrak n_0)$; $z\in\mathfrak l$.
Очевидно, $\alpha(1,z,\mathfrak b_0^L)=(z,\mathfrak b_0)$.
Инъективность: пусть $\alpha(g,x,\mathfrak b^L)=\alpha(\tilde g,\tilde x,\tilde{\mathfrak b}^L)$. Меняя представители эл-тов потом считать $\tilde{\mathfrak b}^L=\mathfrak b^L=\mathfrak b_0^L$. Имеем

5) (1) $g(x+s)g^{-1}=\tilde g(\tilde x+s)\tilde g^{-1}$; (2) $g\mathfrak{b}_0 g^{-1}=\tilde g\mathfrak{b}_0\tilde g^{-1}$; (3) $x,\tilde x\in[\mathfrak{b}_0^L,\mathfrak{b}_0^L]=\mathfrak{n}_0^L$.

Положим $h=\tilde g^{-1}g$. Из (3) имеем $x,\tilde x\in\mathfrak{l}=Z_{\mathfrak{g}}(s)$, следовательно $x+s$, $\tilde x+s$ — разложения Жордана. Т.к. сопряжение сохраняет разложение Жордана: $hxh^{-1}=\tilde x$, $hsh^{-1}=s$. $\Rightarrow h\in L$. Тогда, действуя h на $(g,x,\mathfrak{b}_0^L)$ получим $(gh^{-1},hxh^{-1},h\mathfrak{b}_0^Lh^{-1})=(\tilde g,\tilde x,\mathfrak{b}_0^L)$, то есть $(g,x,\mathfrak{b}^L)$ и $(\tilde g,\tilde x,\mathfrak{b}^L)$ ~~..~~ лежат в одной L-орбите.

<u>Опр.</u> Многообразие Стейнберга $Z=\tilde{\mathcal N}\times_{\mathcal N}\tilde{\mathcal N}=\{(x,\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)\in\mathcal N\times\mathcal B\times\mathcal B\mid x\in\mathfrak{b}_1\cap\ldots$

<u>Пример</u> $G=SL_2$; $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$; $\mathcal B=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&-a\end{pmatrix}\middle| a\neq0\right\}$; $\mathcal N=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}\middle| a^2+bc=0\right\}$ — конус ; $\tilde{\mathcal N}$ — цилиндр ; $\mathcal B\simeq\mathbb P^1$.

$\mathcal N=\mathrm{Spec}\left(\mathbb C[a,b,c]/(a^2+bc)\right)=\mathrm{Spec}\left(\mathbb C[a,b,c]/(a^2+b^2-c^2)\right)$;

$\tilde{\mathcal N}=\mathrm{Spec}\left(\mathbb C[x,y,z]/(x^2+y^2-1)\right)$. $\mathbb C[\mathcal N]\xrightarrow{\mathbb C[\psi]}\mathbb C[\tilde{\mathcal N}]$; $c\mapsto z$, $a\mapsto xz$, $b\mapsto yz$.

$\mathbb C[\tilde{\mathcal N}]\otimes_{\mathbb C[\mathcal N]}\mathbb C[\tilde{\mathcal N}]=\mathbb C[x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2]/(x_1^2+y_1^2-1,\ x_2^2+y_2^2-1,\ x_1z_1-x_2z_2,\ y_1z_1-y_2z_2,\ z_1-\ldots$

$$\left.\begin{aligned}&V(z_1)\simeq\mathbb C[x_1,x_2,y_1,y_2]/(x_1^2+y_1^2-1,\ x_2^2+y_2^2-1)\\&V((x_1-x_2)(y_1-y_2))\simeq\mathbb C[x,y,z]/(x^2+y^2-1)\end{aligned}\right\}\text{— неприв. комп.}\ \underline{\dim_{\mathbb C}=2}$$

<u>Теор</u> (Разложение Брюа). G-диагональные орбиты $Y_w\subset\mathcal B\times\mathcal B$ нумеруются элем-ми группы Вейля W_0. Более того, следующие естественные отображения — биекции: $W_0\to B_0\backslash G/B_0\to B_0\backslash\mathcal B\to G\backslash(\mathcal B\times\mathcal B)$.

<u>Напоминание:</u> Пусть $Y\subseteq X$ — ~~...~~ подмногообразие. Тогда нормальное расслоение к Y в X — $N_{Y/X}=(TX|_Y)/TY$.

По определению, имеем вложение $Z\hookrightarrow\tilde{\mathcal N}\times\tilde{\mathcal N}=T^\vee(\mathcal B\times\mathcal B)$.

<u>Теор.</u> (1) $Z=\bigcup\limits_{w\in W_0}N^\vee_{Y_w/\mathcal B\times\mathcal B}$;

(2) $\dim\left(N^\vee_{Y_w/\mathcal B\times\mathcal B}\right)=\dim\mathcal B\times\mathcal B$ $\quad\forall w\in W_0$;

(3) $\overline{N^\vee_{Y_w/\mathcal B\times\mathcal B}}$ — неприв. комп. Z.

4 ▷ (2): $\dim(N^\vee_{Y_w/\mathcal{B}\times\mathcal{B}}) = \dim(N_{Y_w/\mathcal{B}\times\mathcal{B}}) = \underbrace{(\dim\mathcal{B}\times\mathcal{B} - \dim Y)}_{rk(N_{Y_w/\mathcal{B}\times\mathcal{B}})} + \dim Y = \dim\mathcal{B}\times\mathcal{B}$

(1) Фиксируем $w\in W_0$, $(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)\in Y_w$. Имеем $N^\vee_{Y_w/\mathcal{B}\times\mathcal{B},(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)} = Ker\left(T^\vee(\mathcal{B}\times\mathcal{B})_{(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)} \xrightarrow{\beta} T^\vee Y_{w,(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)}\right)$

$T^\vee Y_{w,(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)} = (\mathfrak{g}/stab_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2))^\vee \cong (stab_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2))^\perp = (\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)^\perp = \mathfrak{b}_1^\perp + \mathfrak{b}_2^\perp = \mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2.$

$T^\vee(\mathcal{B}\times\mathcal{B})_{(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)} = T^\vee\mathcal{B}_{\mathfrak{b}_1}\times T^\vee\mathcal{B}_{\mathfrak{b}_2} = \mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2.$ $\beta(x,y)=x-y.$

$\mathfrak{n}_1\cap\mathfrak{n}_2 \xrightarrow[\sim]{diag} Ker\beta \subset \mathfrak{n}_1\times\mathfrak{n}_2$. Значит, слой Z над $(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)$ совпадает со слоем $N^\vee_{Y_w/\mathcal{B}\times\mathcal{B}}$ над $(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)$. $\Rightarrow Z = \bigcup_{w\in W_0} N^\vee$.

(3) Все $\overline{N^\vee_{Y_w/\mathcal{B}\times\mathcal{B}}}$ — замкнутые неприводимые подмн-ва Z полной размерности $\Rightarrow$ неприв. комп. ◁

Пусть G — топ. группа, H — подгруппа.

Опр. G-расслоение $EG\to BG$ — классифицирующее, если $\forall$ G-расслоения $L\to X$ $\exists!$ $f: X\to BG$, такое что $f^*(EG)=L$.

Утв. Пусть $EG\to BG$ — любое G-рассл. со стягиваемым EG. Тогда оно классифицирующее.

Зам. Универсальное св-во определяет объект, единственный с точностью до ! изоморфизма в гомотопической категории G-расслоений, так что любое EG — стягиваемо.

Опр. Эквив. когомологии $H^\bullet_G(X) = H^\bullet(EG\times_G X)$, где X — G-пространство.

Замеч. В силу предыдущего замечания, разные EG дадут изоморфные функторы когомологий.

Утв. (1) Пусть G/H — стягиваемо. Тогда $H^\bullet_G = H^\bullet_H\circ F$, где F: G-пр-ва $\to$ H-пр-ва — забывающий.

(2) $EG\times_G(G/H)\simeq(EG)/H$.