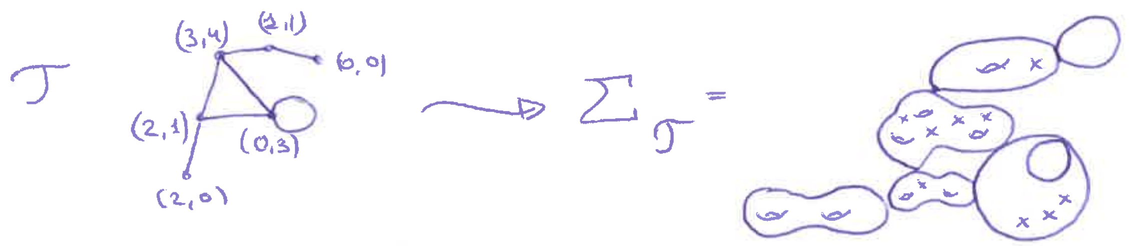
Квантовые когомологии флагов и кокасательных расслоений к ним

23.01.20.

## Малое квантовое умножение

### ① Виртуальный фундаментальный класс

$\Gamma$ – граф, помеченный парами $(g_i,n_i)$ ⇝ особая поверхность $\Sigma_\Gamma$ – пространство, полученное склейкой в $\sqcup \Sigma_{(g_i,n_i)}$ кривых, отвечающих вершинам, соединённым рёбрами. Определены $n(\Gamma)$ и $g(\Gamma)$

$\Gamma$ 



$n(\Gamma)=\sum n_i = 9$

$g(\Gamma)=\sum g_i + \dim_{\mathbb R} H_1(\Gamma,\mathbb R) = 8+2=10$

**Опр** Для графа $\Gamma$ определим пространства модулей

$$\mathcal M_\Gamma = \prod_{v\in V(\Gamma)} \mathcal M_{g(v),n(v)},\quad \mathcal B_{g,n,\beta}=\bigsqcup_{\substack{\Gamma:\, g(\Gamma)=g\\ n(\Gamma)=n}} Map(\Sigma_\Gamma,X)_\beta\times \mathcal M_\Gamma \qquad \square$$

**Утв** (из лекции 16.01.) корректно определён класс в гомологиях

$$[\overline{\mathcal M}^X_{g,n,\beta}]=[\overline{\mathcal M}_{g,n}(X,J_\Sigma,\beta)]\in H_{2vdim}(\mathcal B_{g,n,\beta};\mathbb Z)$$

$vdim = 3g-3+n+\langle c_1(TX),\beta\rangle+\dim_{\mathbb C}X(1-g)$

Набор отображений $J_{\Sigma_\Gamma}:\Sigma_\Gamma\to \mathcal J(X,\omega)$ участвует в конструкции, но не влияет на результат. $\square$

**Утв** (из лекции 20.01.) Для проективного алгебраического $X$ определён собственный стек стабильных алгебраических кривых

$$\overline{\mathcal M}_{g,n}(X,\beta).$$

Касательный ~~класс~~ пучок и пучок препятствий позволяют определить виртуальный фундаментальный класс этого стека, для которого выполнено равенство $i_*([\overline{\mathcal M}_{g,n}(X,\beta)]^{vir})=[\overline{\mathcal M}^X_{g,n,\beta}]$, где $i:\overline{\mathcal M}_{g,n}(X,\beta)\hookrightarrow \mathcal B_{n,g,\beta}$ – естественное вложение. Если препятствия образуют расслоение Obs, то $\overline{\mathcal M}_{g,n}(X,\beta)$ – гладкий стек, и выполнено $[\overline{\mathcal M}_{g,n}(X,\beta)]^{vir}=PD(e(Obs))$ $\square$

Опр Проективное многообразие $X$ выпукло, если для любого алгебраического отображения $\mu: C\to X$ из кривой рода 0 выполнено

$$Obs|_{[\mu]} := H^1(C,\mu^*TX)=0$$

В таком случае, $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)$ гладко и $[\overline{\mathcal{M}}^X_{g,n,\beta}] = i_*[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)]$ □

Замечание Для $[\mu]\in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,\beta)$ $\mu^*TX$ глобально порождено $\Rightarrow Obs|_{[\mu]}=0$

Расслоение $\mu^*TX$ глобально порождено $\Leftrightarrow$ определена сюръекция

$$H^0(C,\mu^*TX)\otimes \mathcal{O}_C \twoheadrightarrow \mu^*TX, \qquad s\otimes f\mapsto f\cdot s.$$

Рассмотрим ядро этого отображения $K$ и длинную точную последовательность когомологий для этой короткой последовательности. Она содержит участок $\to H^1(C,\mathcal{O}_C^{\oplus n})\to H^1(C,\mu^*TX)\to H^2(C,K)$

Последний член этой посл-ти равен 0, так как $\dim_{\mathbb{C}} C=1$.

Из двойственности Серре, $H^1(C,\mathcal{O}_C)=H^0(C,\Omega_C)=H^0(C,\mathcal{O}(-2))=0$

Следовательно, $0=H^1(C,\mu^*TX)=Obs|_{[\mu]}$ □.

Т.о. верна посл-ть импликаций: $X$ - выпукло $\Rightarrow$ $TX$ глобально порождено $\Rightarrow$ $\forall\mu$ расслоение $\mu^*TX$ глобально порождено $\Rightarrow$ $X$ выпукло.

## ② Инварианты Громова-Виттена

Рассмотрим $V=\bigoplus H^i(X,\mathbb{C})$ и отображения $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}\xleftarrow{\pi}\overline{B}_{g,n,\beta}\xrightarrow{ev}X^n$

Отображения $GW_{g,n,\beta}: V^{\otimes n}\to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n};\mathbb{C})$, $\langle\ldots\rangle_{g,n,\beta}: V^{\otimes n}\to\mathbb{C}$ заданы ~~как~~ следующим образом. Для начала, зададим отображение

$$V^{\otimes n}\otimes H_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n};\mathbb{C})\to\mathbb{C}$$

по формуле $$(\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta)\longmapsto \int_{[\overline{\mathcal{M}}^X_{g,n,\beta}]} ev^*(\otimes\alpha_i)\wedge\pi^*PD(\beta).$$

По двойственности Пуанкаре на $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ (над $\mathbb{Q}$, т.к. $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ – orbifold) это отображение определяет $GW_{g,n,\beta}:V^{\otimes n}\to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n};\mathbb{C})$

Интегрируя по $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}]$, получаем $\langle\ldots\rangle_{g,n,\beta} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}]} GW_{g,n,\beta}(\ldots)$. □

**Замечение** Пусть $\mu: C \to X$ — непостоянное отображение, $\mu^*TX$ обильно порождено. Тогда выполнено $\langle \mu_*[C], c_1(TX)\rangle = \langle [C], c_1(\mu^*TX)\rangle > 0$. Покажем это.

Действительно, по теореме Гротендика, расслоение $\mu^*TX$ расщепляется

$$\mu^*TX = \bigoplus \mathcal{O}(a_i).$$

Каждое расслоение $\mathcal{O}(a_i)$ обильно порождено $\Rightarrow a_i \geq 0$. Так как $\langle [C], c_1(\mu^*TX)\rangle = \deg(c_1(\mu^*TX)) = \sum a_i$, осталось показать, что $\mu^*TX$ нетривиально. В противном случае $\mu^*TX \cong \mathcal{O}_C^{\oplus n}$, но дифференциал отображения $\mu$ задает отображение

$$d\mu: TC \longrightarrow \mu^*TX$$

т.е. ненулевое сечение $\mu^*TX \otimes \mathcal{O}(-2) \to C$. $\square$

**Следствие** $X$ — однородное $\Rightarrow H_2(X,\mathbb{Z})$ допускает базис $\beta_i$, представленный вложениями кривых рода $0 \Rightarrow \int_{\beta_i} c_1(TX) > 0$. Тогда для заданного набора элементов $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in V$ сумма $\sum_\beta GW_{g,n,\beta}(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ конечна. Действительно, по определению $GW_{g,n,\beta} = 0$ как только $\sum |\alpha_i| \leq |[\overline{\mathcal{M}}^X_{g,n,\beta}]| - \dim_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{M}}_{g,n} =$

$$= 2\dim_{\mathbb{C}} X(1-g) + 2\langle c_1(TX), \beta\rangle - 2(3g-3+n)$$

Число классов $\beta$, не удовлетворяющих этому нер-ву, конечно $\square$.

**Опр** Рассмотрим полугрупповое кольцо $H_2^{eff}(X,\mathbb{Z})$ и его поле частных

$$R = \mathbb{C}[q^\beta \mid \beta \in H_2^{eff}(X,\mathbb{Z})], \quad k_R \text{ - поле частных } R$$

Определим $V_R := V \otimes k_R = H^\bullet(X, k_R)$. Тогда определены

$GW_{g,n} := \sum_{\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})} GW_{g,n,\beta}\, q^\beta \in (V_R^*)^{\otimes n} \otimes H^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}; k_R)$, $\langle \ldots \rangle_{g,n} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}]} GW_{g,n} \in (V_R^*)^{\otimes n}$ $\square$

## ③ Малое квантовое умножение

X-однородно ⇝ $V_R := \mathbb{Q}[q^\beta \mid \beta\in H_2^{eff}(X,\mathbb{Z})]$, $\langle\ldots\rangle_{0,3}\in (V_R^*)^{\otimes 3}$

Обозначим $\eta_P: V\otimes V\to\mathbb{C}$ спаривание Пуанкаре $\eta_P(\alpha,\beta)=\int_X \alpha\wedge\beta$.

$\eta_P$ продолжается до невырожденного спаривания $V_R^{\otimes 2}\to k_R$ по лин-ти.

**Опр** Кольцо малых квантовых когомологий $QH_s^*(X)$ это пространство $V_R$ с умножением $*_s$, заданным равенством

$\forall \alpha,\beta,\gamma\in V_R$ $\quad \eta_P(\alpha *_s\beta,\gamma)=\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle_{0,3}\in k_R$. □

**Утв** Малое квантовое умножение ассоциативно.

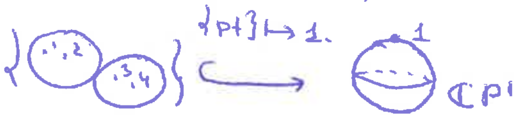
**Док-во** Напомним, что для пары разбиений $g=g_1+g_2$, $n=n_1+n_2$ определено отображение $r:\overline{M}_{g_1,n_1+1}\times\overline{M}_{g_2,n_2+1}\to\overline{M}_{g,n}$, заданное склеиванием кривых в последних отмеченных точках.

Важное свойство отображений $GW_{g,n,\beta}$, следующее из конструкции $[\overline{M}^{+}_{g,n,\beta}]$ как фундаментального класса $\overline{M}_{g,n}(X,J_{\mathbb{Z}},\beta)$, это равенство: $r^*(GW_{g,n})=i_\Delta(GW_{g_1,n_1+1}\otimes GW_{g_2,n_2+1})$, где $\Delta\in V_R^{\otimes 2}$ - диагональ.

Применим это тождество к случаю $g=0$, $n_1=n_2=2$. Заметим, что $M_{0,3}=\overline{M}_{0,3}=\{pt\}$, $M_{0,4}\cong\mathbb{CP}^1-\{0,1,\infty\}$, $\overline{M}_{0,4}\cong\mathbb{CP}^1$

$\{z_1\ldots z_4\}\longmapsto[z_1,z_2,z_3,z_4]$

Вложение r имеет вид




$z_1\to z_2 \Rightarrow \dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\dfrac{z_4-z_1}{z_4-z_2}\to 1$

Таким образом, получаем следующее равенство: для базиса $\{e_i\}$ в V и двойственного $\{e^i\}$

$\forall a,b,c,d\in V_R$ $\quad \langle a,b,c,d\rangle_{0,4} = \langle GW_{0,4}\rangle(a,b,c,d)=\sum_i GW_{0,3}(a,b,e_i)\cdot GW_{0,3}(e^i,c,d)$

Тогда имеем:

$\forall a,b,c,d \in V_R$ $\quad \eta_P(a*_s(b*_s c),d)=GW_{0,3}(a,b*_s c,d)=\sum_i \eta(b*_s c,e_i)\cdot GW_{0,3}(a,e^i,d)=$

$=\sum_i GW_{0,3}(b,c,e_i)GW_{0,3}(a,e^i,d)=\langle a,b,c,d\rangle_{0,4}$. Используя

$S_4$ инвариантность $GW_{0,4}$ влечет р-во $\eta_P(a*_s(b*_s c),d)=\eta_P((a*_s b)*_s c,d)$

Замечание. Рассмотрим элемент $\mathbb{1} \in V$, $\mathbb{1} := PD([X])$. Напомним, что по свойству $[\pi^*_{g,n,\beta}]$ инварианты Громова-Виттена удовлетворяют

v $p^* GW_{g,n,\beta} = i_{\mathbb{1}} GW_{g,n+1,\beta}$ для отображения забывания отмеченной точки (которое для $g=0,\ n=2$ определено всюду, кроме $\beta \neq 0$). Тогда из соображений размерности $\langle a, b, \mathbb{1}\rangle_{0,3,\beta} \equiv 0$ при $\beta \neq 0$.

v С другой стороны, для $\beta = 0$ и $g=0$ отображение $\langle \dots \rangle_{0,n,0}$ не зануляется только при $n=3$. В этом случае,

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{0,3,0} = \int_X \alpha \wedge \beta \wedge \gamma.$$

v Из последних двух замечаний, получаем, что $\forall \alpha, \beta \in V_R$ имеем

$$\langle \alpha, \beta, \mathbb{1}\rangle_{0,3} = \sum_\beta \langle \alpha, \beta, \mathbb{1}\rangle_{0,3,\beta}\, q^\beta = \langle \alpha, \beta, \mathbb{1}\rangle_{0,3,0} = \oint_P (\alpha, \beta)$$

$$\Rightarrow \eta(\alpha *_s \mathbb{1}, \beta) = \eta(\alpha, \beta) \Rightarrow \alpha *_s \mathbb{1} = \alpha \Rightarrow \mathbb{1} \text{ - единица для умн-ия } \square.$$

Замечание. Для симплектической формы $\omega$ не ~~определим~~ определим симплектическое малое квантовое умножение $*^\omega$ как операцию, заданную $*_s$ с помощью отображения $R \to \mathbb{C}$ $q^\beta \mapsto \exp(-\int_\beta \omega)$. Заметим, что $\langle \dots \rangle_{0,3,\beta} \equiv 0$ при $\int_\beta \omega < 0$ либо $\int_\beta \omega = 0$ и $\beta \neq 0$. Таким образом, при устремлении $\omega \to \infty$ операция $\langle .. \rangle^\omega_{0,3} \to \langle \dots \rangle_{0,3,0} \Rightarrow$ симплектическое малое квантовое умн-ие стремится к $\wedge$ $\square$

Пример. Кольцо $QH^\circ_s(\mathbb{P}^n)$ изоморфно фактору $\mathbb{C}[T,q]/(T^{n+1}-q)$, $\deg T = 2$, $\deg q = 2n+2$

Док-во. Обозначим за $T$ класс гиперплоского сечения в $H^2(\mathbb{P}^n)$. Тогда $H^2_{ef}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_+[T]$, $R = \mathbb{C}[T]$, ~~$K_R = \mathbb{C}[T]$~~. Пр-во $V_R$ порождено $\{T_i = T^i\}$ над $K_R$.
Заметим, что выражение $\langle T_i, T_j, T_k\rangle_{0,3,\beta} \neq 0$ только если выполнено рав-во

$$2(3 + (n-3) + \int_\beta c_1(TX)) = \sum |T_i| \Leftrightarrow n + d(n+1) = i+j+k \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le i+j \le n & d=0 \quad k = n-(i+j) \\ n < i+j \le 2n & d=1 \quad k = 2n+1-(i+j) \end{cases}$$

Т.о.
$$\langle T_i, T_j, T_k\rangle_{0,3} = \begin{cases} T_i \wedge T_j \wedge T_k = T_n = 1 & \text{если } i+j+k = n \\ q\langle T_i, T_j, T_k\rangle_{0,3,1} & \text{если } i+j+k = 2n+1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \Leftrightarrow T_i * T_j = \begin{cases} T_{i+j} & i+j \le n \\ q\,\underbrace{T_{i+j-n-1}}_{\langle T_i, T_j, T_{2n+1-i-j}\rangle_{0,3,1}} & i+j > n \end{cases}$$

Т.о. $QH^\circ_s(\mathbb{P}^n)$ порождено $T$ и достаточно посчитать $T_n * T_1 = q\langle T_1, T_n, T_n\rangle_{0,3,1} T_0$

По аксиоме дивизора $\langle T_1, T_n, T_n\rangle_{0,3,1} = \int_{[H]} T_1 \langle T_n, T_n\rangle_{0,2,1} = \langle T_n, T_n\rangle_{0,2,1} = 1$, т.к. $\exists$ 1 прямая, проходящая через 2 точки в общем положении.

# Потенциал Громова-Виттена

**Опр** $X$ - однородное мн-зие. Потенциалом называется формальный ряд $\Phi$ на пространстве $V_{\mathbb{R}}$: $\Phi(v) := \sum'_{n\geq 3} \frac{1}{n!} \langle v,\dots,v\rangle_{0,n}$. □

**Ут** Потенциал $\Phi$ удовлетворяет уравнению WDVV, обобщающему условие ассоциативности малого квантового умножения:

$$\forall a,b,c,d \quad \sum_{e,f} \Phi_{a,b,e}\,\eta^{e,f}\,\Phi_{f,c,d} = \sum_{e,f} \Phi_{b,c,e}\,\eta^{e,f}\,\Phi_{f,a,d}$$

где индекс $k$ снизу обозначает частную производную вдоль постоянного векторного поля $v_k$, отвечающего базисному вектору с индексом $k$, а $(\eta^{e,f})$ - матрица, обратная матрице $(\eta_{e,f})$, определяющей спаривание Пуанкаре. □

**Пример** Рассмотрим $X = \mathbb{P}^2$. Заметим, что $\langle PD[pt],\dots,PD[pt]\rangle_{0,n,d} \neq 0$ только если выполнено равенство $n = 3d-1$. Обозначим за $N(d) := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,3d-1}(\mathbb{P}^2,d)]} ev^*(\otimes PD[pt])$ - правильным образом посчитанное число кривых степени $d$, проходящих через $3d-1$ точку общего положения.

Теперь для $v = x_0T_0 + yT_1 + zT_2$ $\quad \Phi(v) = \frac{1}{6}\int v\wedge v\wedge v + \varphi(y,z)$, где

$$\varphi(y,z) = \sum_{n\geq 4} \frac{1}{n!}\langle yT_1+zT_2,\dots,yT_1+zT_2\rangle_{0,n} = \sum_{n\geq 4}\frac{1}{n!}\sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}\langle \underbrace{T_1\dots T_1}_{n-k},\underbrace{T_2\dots T_2}_{k}\rangle_{0,n}\, y^{n-k}z^k.$$

Т.к. по аксиоме дивизора, для $\alpha\in H^2(X,\mathbb{C})$ $\langle \alpha_1\dots\alpha_n,\alpha\rangle_{0,n+1,\beta} = \int_\beta \alpha\,\langle\alpha_1\dots\alpha_n\rangle_{0,n,\beta}$

$$\langle \underbrace{T_1\dots T_1}_{n-k},\underbrace{T_2\dots T_2}_{k}\rangle_{0,n} = \sum_{d\geq 0}\langle \underbrace{T_1\dots T_1}_{n-k},\underbrace{T_2\dots T_2}_{k}\rangle_{0,n,d}\, q^d = \sum'_{d\geq 0} d^{n-k}\langle T_2\dots T_2\rangle_{0,k,d}\, q^d \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \langle \underbrace{T_1\dots T_1}_{n-k},\underbrace{T_2\dots T_2}_{k}\rangle_{0,n} = \begin{cases} d^{n-k}N(d)q^d & \text{если } \exists d:\ 3d-1=k \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Таким образом

$$\varphi(y,z) = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k}\frac{1}{k!(n-k)!}\langle T_1\dots T_1,T_2\dots T_2\rangle_{0,n}\, y^{n-k}z^k = \sum'_{d\geq 1}\sum'_{n\geq 3d-1}\frac{d^{n-k}N(d)q^d}{(3d-1)!(n-3d+1)!}\, y^{n-3d+1}z^{3d-1} =$$

$$= \sum_{d\geq 1}\frac{z^{3d-1}}{(3d-1)!}N(d)q^d\sum_{n\geq k=3d-1}\frac{d^{n-k}}{(n-k)!}y^{n-k} = \sum'_{d\geq 1}\frac{z^{3d-1}}{(3d-1)!}N(d)q^d$$

Теперь ур-ие WDVV на $\Phi$ дает ур-ие $\varphi_{zzz} = \varphi_{yyz}^2 - \varphi_{yyy}\varphi_{yzz}$, которое влечет рекуррентное соотношение

$$N(d) = \sum_{k+l=d} N(k)N(l)\,k^2 l\left[l\binom{3d-4}{3k-2} - k\binom{3d-4}{3k-1}\right] \quad \square.$$