Квантовые когомологии флагов 16.01.20.
и кокасательных расслоений к ним.

Лекция №1. Введение в теорию Громова-Виттена

Сеттинг
- X - гладкое, компактное, ориентированное многообразие $/\mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} X = 2D$;
- $\omega \in \Omega^2(X, \mathbb{R})$ - симплектическая форма
$$d\omega = 0, \quad \omega^{\wedge D} > 0;$$
- $J \in \mathrm{End}(TX)$, $J^2 = -\mathrm{Id}$ - оператор почти-комплексной структуры;
- ω и J согласованы, т.е. ω J-инвариантна и тензор $\rho(\cdot,\cdot) := \omega(J\cdot,\cdot)$ - риманова метрика $\square$

Замечание Пространство $\mathcal{J}(X,\omega)$ почти-комплексных структур, согласованных с ω, непусто и стягиваемо
$$\mathcal{J}(X,\omega) \sim \{*\}. \quad \square$$

Примеры
- $X \subset \mathbb{CP}^n$ - проективное многообразие $J := d(x\,i)$, $\omega = \omega_{FS}|_X$ - согласованы;
- X - однородное многообразие, т.е. компактное комплексное многообразие, допускающее транзитивное действие полупростой группы G биголоморфизмами. $\square$

Замечание Однородное мн-зие проективно, это дает симплектическую форму $\square$

Главное свойство Голоморфное касательное расслоение TX однородного X глобально порождено.

Пространство модулей кривых

Определение (g,n) - пара целых чисел с условиями

$$g,n \geqslant 0 \quad 3g-3+n \geqslant 0$$

Σ - компактная ориентируемая поверхность $/\mathbb{R}$ рода g

$$\mathcal{M}_{g,n} := \left\{ (\Sigma, j, z_1, \ldots, z_n) \,\middle|\, \begin{array}{l} j\text{ - комплексная} \\ \text{структура на } \Sigma \\ z_i \in \Sigma,\ z_i \neq z_j \end{array} \right\} \Big/ \begin{array}{l} \varphi : (\Sigma, j) \to (\Sigma, j')\text{ - biholom} \\ \varphi(z_i) = z_i' \end{array}$$

□

Утв $\mathcal{M}_{g,n}$ - комплексный орбифолд размерности $\dim_{\mathbb{C}} = 3g-3+n$ □

Пример • $g=0,\ n=k+3$ $\quad \mathcal{M}_{0,k+3} \cong \prod_k (\mathbb{C}P^1 - \{0,1,\infty\}) - \Delta_{ij}$

- дополнение к диагоналям. Это многообразие т.к. кривые рода 0 с $k+3$ отмеч. точками не имеют автоморфизмов

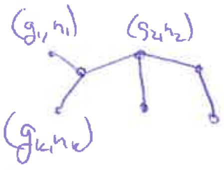
• $g=1,\ n=1$ $\quad \mathcal{M}_{1,1}$ - модулярная кривая.

Это орбифолд, каждая точка фактора является неподвижной точкой для некоторого нетривиального автоморфизма. □

Замечание Отсутствие точек с нетривиальной группой автоморфизмов - необходимое условие для того, чтобы соответствующий функтор точек представлялся схемой. Поэтому, приходится работать со стеками. □

Опр Стабильной нодальной кривой с отмеченными точками называется особая алгебраическая кривая, особенности которой - простые само пересечения и для каждой компоненты Σ_i которой выполнено неравенство: $n_i + 3g_i + m_i - 3 \geqslant 0$, где g_i - род, n_i - число отмеченных точек, m_i - число нодов. □

Опр Γ - стабильный оснащенный граф



$3g_i + n_i + m_i - 3 \geqslant 0$

$$\mathcal{M}_\Gamma := \prod_{v \in V(\Gamma)} \mathcal{M}_{g_v,n_v}$$ - пространство стабильных кривых типа Γ

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n} := \bigsqcup_{\Gamma \,\mid\, \substack{n(\Gamma)=n \\ g(\Gamma)=g}} \mathcal{M}_\Gamma$$ - пространство стабильных кривых с n отм. точками, алгебраического рода g.

Компактификация Делиня-Мамфорда

Утв $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ — компактный комплексный орбифолд разм $d/\mathbb{C}$

Определен фундаментальный класс $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}]\in H_{2d}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q})$ □

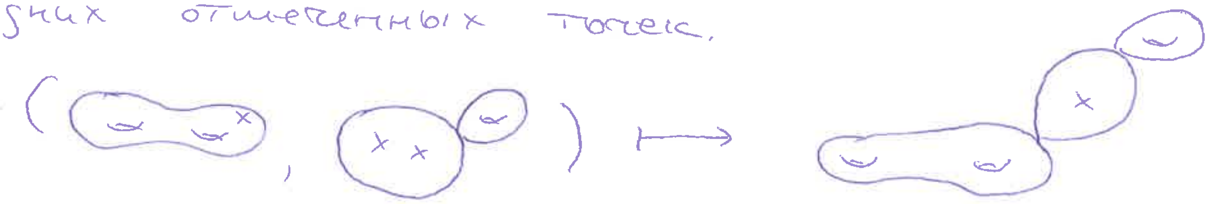
Пример $g=0$, $n=k+3$ $\overline{\mathcal{M}}_{0,k+3}=\bigsqcup_{\text{деревья }\Gamma}\mathcal{M}_\Gamma$, $\mathcal{M}_\Gamma=\prod_{v\in V(\Gamma)}\mathcal{M}_{0,n_v}$

— это некоторое компактное многообразие □

Замечание В дальнейшем нам понадобятся некоторые естественные отображения между пространствами модулей, для которых мы сейчас зафиксируем обозн-ия.

$$r:\ \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1}\times\overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1}\longrightarrow\overline{\mathcal{M}}_{g,n}\qquad g=g_1+g_2,\ n=n_1+n_2$$

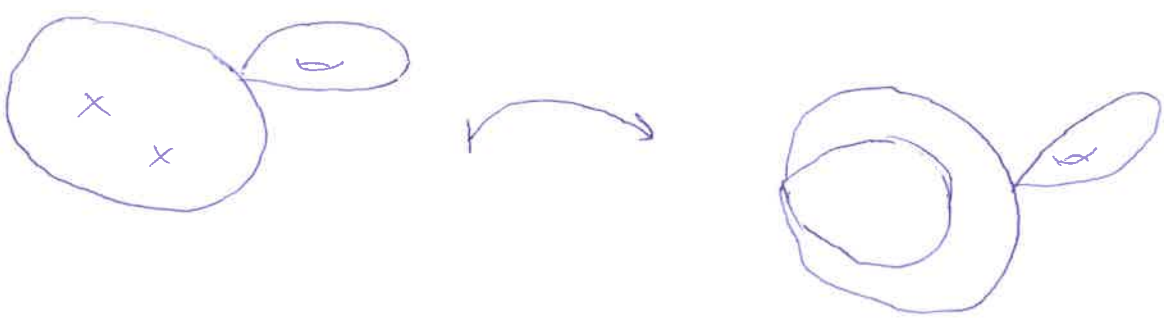
отображение, заданное склеиванием двух последних отмеченных точек.



$p:\ \overline{\mathcal{M}}_{g,n}\to\overline{\mathcal{M}}_{g,n-1}$ — забывание последней отмеченной точки (и „стабилизация")

$q:\ \overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}\to\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$

отображение, заданное склеиванием двух последних отмеченных точек на кривой — операция, повышающая алгебраический род на 1.



Деформации комплексных структур.

Сейчас мы объясним, почему $\mathcal{M}_{Jn}$ - комплексный орбифолд и явно опишем касательное пр-во в точке.

Замечание Зафиксируем вещественное мн-зие X. Тогда

$$\left\{\begin{matrix}\text{комплексная стр-ра}\\ \text{на мн-зии } X\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{интегрируемая}\\ \text{почти-комплексная}\\ \text{структура на } TX\end{matrix}\right\} \overset{\text{т-ма Ньюлендера-Ниренберга}}{=} \left\{\begin{matrix} T^{1,0} \subset TX \otimes \mathbb{C} \\ T^{1,0} \cap \overline{T^{1,0}} = \{0\} \\ [T^{1,0}, T^{1,0}] \subset T^{1,0}\end{matrix}\right\}$$

$\square$

Рассмотрим последнее описание и перейдём к двойственному разложению. Зафиксируем интегрируемое J. ~~Тогда~~ Близкая почти-комплексная структура J' задана подпространством

$$\Omega^{1,0}_{J'} \subseteq \Omega^{1,0}_{J} \oplus \Omega^{0,1}_{J}$$

близким к $\Omega^{1,0}_J$, т.е. графиком линейного отображения, которое мы обозначим $(-S)$ $\Omega^{1,0}_J \to \Omega^{0,1}_J$, $S \in \Gamma(T^{1,0}_J \otimes \Omega^{0,1}_J)$ $\square$

Замечание Непосредственное вычисление позволяет установить равенство $S = \overline{\partial}_{(TX, J')} - \overline{\partial}_{(TX, J)}$, где справа написана разность операторов Дольбо в комплексных расслоениях. $\square$

Следствие Интегрируемость $J' \Leftrightarrow (\overline{\partial}_{TX, J'})^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{\partial} S + \frac{1}{2}[S, S] = 0$ где скобка Ли на $(\oplus_q \Omega^{0,q}_X \otimes TX^{1,0}, \overline{\partial})$ задаётся равенством

$$[\alpha \otimes v, \alpha' \otimes v'] = (\alpha \wedge \alpha') \otimes [v, v']$$

$\square$

Таким образом, пространство деформаций комплексной структуры J на многообразии X описывается как фактор

$$\left\{ S \in \Gamma(X, T^{1,0}_J \otimes \Omega^{0,1}_J) \,\middle|\, MC(S) := \overline{\partial} S + \tfrac{1}{2}[S, S] = 0 \right\} \Big/ \mathrm{Diff}$$

$\square$

Касательное пр-во к модулям комплексных структур

Замечание Пусть (X, J) не имеет глобальных автоморфизмов. Тогда если $\varphi^* J \sim J$, $\varphi \in \mathrm{Diff}$, то $\varphi^* J$ может быть описано с помощью s. А именно, $\varphi^* J$ отвечает $s = -(\partial\varphi)^{-1}\bar\partial\varphi$, где

$$\partial\varphi : TX^{1,0} \to \varphi^* TX^{1,0}$$
$$\bar\partial\varphi : TX^{0,1} \to \varphi^* TX^{1,0}$$ — разложение $d\varphi$ по типам.

Т.о. $\mathrm{Def}(J) = \{ s \mid MC(s) = 0 \} / \{ -(\partial\varphi)^{-1}\bar\partial\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Diff} \}$ □

Замечание Опишем деформации первого порядка (над $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$).
Рассмотрим семейство $J(t)$, $J(0) = J$. Это дает семейство

$$s(t) \in \Omega^{0,1}(X, TX^{1,0})$$
$$s(0) = 0, \quad \bar\partial s(t) + \tfrac{1}{2}[s(t), s(t)] = 0$$

что влечет единственное условие $\bar\partial s_1 = 0$ на $s_1 = \frac{\partial}{\partial t} s(t)$.
Аналогично, семейство автоморфизмов $\varphi(t)$ с касательным вектором в нуле $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = v \in \Gamma(X, TX)$ ~~имеет~~ действует на s_1 как $s_1 \mapsto s_1 - \bar\partial v$. Т.о. пр-во деформаций первого порядка это фактор

$$\mathrm{Def}_1(X, J) = \frac{\ker(\bar\partial : \Omega^{0,1}(X, TX^{1,0}) \to \Omega^{0,2})}{\mathrm{Im}(\bar\partial : C^\infty(X, TX^{1,0}) \to \Omega^{0,1})} = H^1(X, TX^{1,0})$$

Это и есть касательное пр-во к $\mathcal{M}_{cx}(X)$. □

Замечание Пусть $H^2(X, TX^{1,0}) = 0$. Тогда $\forall s_1$ из ядра $\bar\partial$ существует $s(t)$ — деформация с $\frac{\partial}{\partial t} s(t) = s_1$. Действительно, ур-ие $\bar\partial s(t) + \frac{1}{2}[s(t), s(t)] = 0$ можно решить индуктивно. На каждом шаге $\bar\partial s_j = \ldots$ и правая часть лежит в ядре $\bar\partial$.
Для X - кривой $H^2(X, T^{1,0}X) = 0$ и препятствий нет, $\mathcal{M}$ гладкое.

J-голоморфные отображения

<u>Опр</u> $u:(\Sigma,j)\to(X,\omega,J)$ J-голоморфно, если $J\circ du = du\circ j$, то есть
$$\bar\partial_J(u):=\frac{1}{2}(du+J\circ du\circ j)=0\in\Gamma(\Sigma,\Omega^{0,1}_\Sigma\otimes u^*TX)$$
Для класса $\beta\in H_2(X)$ определено пр-во J-голом. кривых в классе β
$$\mathcal{M}_{g,n}(X,J,\beta)=\left\{(\Sigma,j,z_1,\dots,z_n),u:\Sigma\to X \;\middle|\; \begin{matrix}u_*[\Sigma]=\beta\\ \bar\partial_J(u)=0\end{matrix}\right\}\Big/\sim \quad \begin{matrix}\varphi:\Sigma\to\Sigma'\text{-bihdom}\\ u'\circ\varphi=u\\ \varphi(z_i)=z_i'\end{matrix}$$
Энергией $[u]\in\mathcal{M}_{g,n}(X,J,\beta)$ называется $E(u):=\int_\Sigma u^*\omega=\langle\omega,\beta\rangle$. $\triangledown$

<u>Замечание</u> Условие J голоморфности влечет равенство
$$E(u)=\int_\Sigma \|du\|_{L^2}\,vol$$ относительно метрики ρ. Т.о.
$E(u)\geq 0$ и $E(u)=0\Leftrightarrow u=const\Leftrightarrow\beta=0$. $\square$

<u>Замечание</u> $[u]\in\mathcal{M}_{g,n}(X,J,\beta)$ пропускается через отображение
$u':\Sigma'\to X$, т.ч. $\begin{cases} u'-J\text{-голоморфное}\\ u=u'\circ\varphi,\ u' \text{ не имеет автоморфизмов}\\ \varphi:\Sigma\to\Sigma' \text{ разветвленное накрытие}\end{cases}$

причем $Aut([u])\simeq Aut(\varphi)$. $\triangledown$

<u>Пример</u> $g=0$ элементы $[u]\in\mathcal{M}_{0,k+3}(X,J,\beta)$ не имеют авт-ов. $\square$

<u>Определение</u> Рассмотрим пр-во $Map(\Sigma,X)_\beta\times\mathcal{M}_{g,n}=\mathcal{B}$
и расслоение $\mathcal{E}\to\mathcal{B}$ со слоем $\mathcal{E}_{(u,j)}:=\Gamma(\Sigma,\Omega^{0,1}_\Sigma\otimes u^*TX)$
Т.о. $\mathcal{J}(X,\omega)$ параметризует семейство сечений $\mathcal{B}\rightleftarrows\mathcal{E}$ $\square$

<u>Замечание</u> Рассмотрим расслоение $E\to N$ (теперь все конечномерное). Тогда в $\Gamma(N,E)$ существует плотное мн-во $\Gamma_{reg}(N,E)$ сечений, пересекающих нулевое сечение трансверсально. Тогда $\forall s\in\Gamma_{reg}(N,E)$ пр-во $M_s:=s^{-1}(0)$ – многообразие, а для пары $s_0,s_1\in\Gamma_{reg}$ общий путь $s_t\in\Gamma(N,E)$ задает кобордизм $\coprod\limits_{t\in[0,1]} M_{s_t}$ между M_{s_0} и M_{s_1} над N.

Условие трансверсальности $\bar\partial_J$

<u>Замечание</u> Вернемся к конечномерной модели

$$E \underset{\pi}{\overset{s}{\leftrightarrows}} N$$

касательное расслоение к E в точках нулевого сечения имеет вид $TE|_N \cong TN \oplus E$, т.к. имеется расщепление

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] & TE|_N \arrow[r, "D\pi"] & TN \arrow[l, bend left, dashed] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Т.о., дифференциал s в точках M_s ~~это оператор~~ $Ds: TN|_{M_s} \to TN|_{M_s} \oplus E|_{M_s}$

Т.к. s — сечения, ~~Ds~~ образ Ds лежит в E. Условие регулярности s это сюръективность индуцированного оператора $TM_s \to E|_{M_s}$.

<u>Обозначим</u> за N_J <u>тензор Нийенхойса</u> для п.к. стр-ры J на X

$$N_J \in \Gamma(X, \Omega^2_X \otimes T_X)$$

<u>Утв</u> Рассмотрим ограничение $\bar\partial_J$ на подпр-во $Map(\Sigma, X)_\beta \times \{j\}$. Дифференциал этого ограничения индуцирует в точке $[u]$ оператор

$$D_{\bar\partial} : T_{[u]} Map(\Sigma, X)_\beta = \Gamma(\Sigma, u^*TX) \to \mathcal{E}_u = \Gamma(\Sigma, \Omega^{0,1}_\Sigma \otimes u^*TX)$$

$$D_{\bar\partial}(v) = \bar\partial_{u^*TX} v + u^* N_J(v, Du). \qquad \square$$

<u>Следствие</u> $\bar\partial_J$ — регулярное сечение, если $\forall [u] \in M_{g,m}(X, J, \beta)$ описанный выше оператор $D_{\bar\partial}$ сюръективен. $\square$

<u>Замечание</u> $\bar\partial_{u^*TX}$ — оператор Коши-Римана на u^*TX $\Rightarrow$ он эллиптический $\Rightarrow$ фредгольмов. Второй оператор — линейный $\Rightarrow$ он меньшего порядка $\Rightarrow$ его прибавление не влияет на фредгольмовость и индекс. Т.о. $\operatorname{ind} D_{\bar\partial} = \operatorname{ind} \bar\partial_{u^*TX} =$
$= \chi(u^*TX, \bar\partial_{u^*TX}) = 2\deg(u^*TX, u^*J) + 2(1-g)D = 2\langle c_1(TX), \beta\rangle + 2(1-g)D$ $\square$

<u>Пример</u> Пусть J интегрируема $\Leftrightarrow$ $N_J \equiv 0$. ~~Тогда~~ имеем

$$T(M_{g,n}(X, J, \beta) \cap \{j = j_0\}) = \ker D_{\bar\partial} = \ker \bar\partial_{u^*TX} = H^0(\Sigma, u^*TX)$$

Это соответствует интуиции. $\square$

Пространство модулей J-голом кривых

<u>Опр</u> J-голом кривая $u: \Sigma \to X$ — простая, если $\exists z \in \Sigma$: $\begin{cases} Du \text{ инъект.} \\ u^{-1}(u(z)) = \{z\} \end{cases}$ □

<u>Замечание</u> Мы уже обсудили, что непостоянная J голом кривая поде о простой □

<u>Опр</u> Почти комплексная структура $J \in \mathcal{J}^{reg}$ <u>регулярна</u>, если $\forall$ простой кривой $u \in \mathcal{M}^*_{g,n}(X, J, \beta)$ отображение сюръективно

$$D\bar\partial : T_u(\mathrm{Map}(\Sigma, X)_\beta \times \mathcal{M}_{g,n}) \twoheadrightarrow \mathcal{E}_u$$ □

<u>Утв</u> 1) $\forall J \in \mathcal{J}^{reg}$ пространство $\mathcal{M}^*_{g,n}(X, J, \beta)$ простых J-голоморфных кривых в классе β — гладкое ориентируемое многообразие $/\mathbb{R}$ размерности $2\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{g,n} + 2\,\mathrm{ind}\,\bar\partial_{u^*TX}$;

2) Мн-во $\mathcal{J}^{reg} \subset \mathcal{J}(X, \omega)$ Бэровское, в частности всюду плотно.

<u>Идея док-ва</u> 1) По теореме Ремилотово-Неше, обобщающую теорему о неявной функции, прообраз регулярного зн-я — гладкое мн-зие размерности $\mathrm{ind}\, D_{\bar\partial} + \dim \mathcal{M}_{g,n}$. Ориентация приходит из ориентации на $\Lambda^{\mathrm{ind}} D_{\bar\partial}$ $\ker D_{\bar\partial}$. Например, если J интегрируемо, то D_J — $\mathbb{C}$-линейно, и $\ker D_J$ — комплексное пространство.

2) Тут надо использовать т-му Сарда-Смейла для

$$\mathcal{M}^*_{g,n}(X, \mathcal{J}, \beta) \to \mathcal{J}(X, \omega)$$ □

<u>Замечание</u> Вообще говоря, вполне возможно $\mathcal{J}^{int} \cap \mathcal{J}^{reg} = \emptyset$. □

<u>Утв</u> Для пары $J_0, J_1 \in \mathcal{J}^{reg}$ и общего пути $J_t \in \mathcal{J}(X, \omega)$ пространство $\coprod_{t \in [0,1]} \mathcal{M}^*_{g,n}(X, J_t, \beta)$ — гладкий кобордизм орбифолдов

<u>Док-во</u> аналогично предыдущему утв-нию □

Т.о. корректно определен класс кобордизма $\mathcal{M}^*_{g,n}(X, J, \beta)$ рег B, не зависящий от J. Для $g = 0$ $\mathcal{M}^*_{0,n}(X, J, \beta) = \mathcal{M}_{0,n}(X, J, \beta)$.

Компактификация Громова

Опр Стабильным отображением называется отображение $u_{\infty}: \Sigma \to X$ из нодальной кривой с отмеченными точками, голоморфное на каждой компоненте, такое, что для любой компоненты $\Sigma_i \subset \Sigma$ выполнено одно из двух:

$$u|_{\Sigma_i} \not\equiv const \quad \text{или} \quad \Sigma_i \text{ - стабильная кривая } \square$$

Утв (Громов) Для компактного симплектического (X,ω), $\forall$ из каждой последовательности $[u_n]$ J-голом кривых $\exists\, \mathcal{E}\ \ E(u_n) < \mathcal{E} \Rightarrow \exists$ подпоследовательность, сходящаяся к стабильной кривой $u_{\infty}: \Sigma_{\infty} \to X$. $\square$

Замечание Для каждого графа Γ зафиксируем кривую Σ_Γ топологического типа Γ. Рассмотрим пространство

$$\overline{\mathcal{B}}_{g,n,\beta} := \bigsqcup_{\substack{\Gamma \mid g(\Gamma)=g \\ n(\Gamma)=n}} Map(\Sigma_\Gamma, X)_\beta \times \mathcal{M}_\Gamma$$

Тогда мн-во нулей сечения $\bar\partial_J$ в $\overline{\mathcal{B}}_{g,n,\beta}$ - компактное топологическое пр-во $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,J,\beta)$, содержащее $\mathcal{M}^*_{g,n}(X,J,\beta)$ $\square$

Утв Зафиксируем для каждого Γ отобр-ие $\Sigma_\Gamma \to \mathcal{J}(X,\omega)$ согласованное относительно операции склеивания пунктированных кривых. Рассмотрим сечение

$$\bar\partial_{J_\Sigma}(u) := du + J_\Sigma(u(z),z)\, du\, j$$

Тогда для общего набора $\Sigma_\Gamma \to \mathcal{J}(X,\omega)$ мн-во нулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,J,\beta)$ - гладкое компактное мн-зие, содержащее $\mathcal{M}_{g,n}^*(X,J,\beta)$ как открытое подмн-во. Это задает класс кобордизма и класс в гомологиях $\overline{\mathcal{B}}_{g,n,\beta}$

Инварианты Громова-Виттена

Предыдущее утверждение позволяет определить класс

$$[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,J,\beta)] \in H_{2d}(\overline{\mathcal{B}}_{g,n,\beta})$$

Это аналог класса Эйлера расслоения $\mathcal{E} \to \overline{\mathcal{B}}_{g,n,\beta}$.

Обозначим $V^{\bullet} = \bigoplus_i H^i(X,\mathbb{C})$

Опр $\forall \beta \in H_2(X)$ и (g,n) $2g+n-3 \geq 0$ задана операция

$$GW_{g,n,\beta} : V^{\otimes n} \longrightarrow H^{\bullet}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n};\mathbb{C})$$

$$GW_{g,n,\beta}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) := \pi_*\left(ev^*(\otimes \alpha_i) \cap [\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,J,\beta)]\right)$$

где $ev : \overline{\mathcal{B}}_{g,n,\beta} \to X^n$ задано $[u] \mapsto (u(z_1)\dots u(z_n))$. □

Замечание Спарив $GW_{g,n,\beta}$ с $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}]$ получаем

$$\langle GW_{g,n,\beta}\rangle : V^{\otimes n} \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

Геометрический смысл этой операции - подсчет кривых на X с граничными условиями:

$$\langle GW_{g,n,\beta}\rangle(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \# \left\{ \begin{array}{l} \text{кривые рода } g \text{ с } n \text{ отмеченными} \\ \text{точками в } X\text{, где } i\text{-ая точка лежит} \\ \text{на подмн-ве } \Delta_i\text{, представляющем} \\ \text{класс, PD классу } \alpha_i \end{array} \right\}$$

правильно посчитанное число □

Замечание Операции $GW_{g,n,\beta}$ обладают следующими очевидными свойствами: • GW не зависит от J;

- GW линейно по каждому аргументу;
- $GW_{g,n,\beta}$ - S^n-супер-коммутативно
- $GW_{g,n,\beta}(\alpha_1\dots\alpha_n)$ имеет степень $2(g-1)D - 2\langle c_1(TX),\beta\rangle + \sum \alpha_i$
- $GW_{g,n,\beta} \equiv 0$ как только $\langle \omega,\beta\rangle < 0$ и для $g=0, \beta=0$
  $GW_{0,n,0}(\alpha_1\dots\alpha_n) = \int_X \alpha_1 \wedge\dots\wedge \alpha_n [\overline{\mathcal{M}}_{g,n}]$.

У-е GW согласованы с операциями, индуцированными отображениями r, p, q, связывающими пр-ва модулей:

$$p^* GW = i_{\mathbb{1}} GW, \quad \alpha_n \in H^0(X,\mathbb{C}) \Rightarrow i_{\alpha_n} p_* GW = \int_\beta \alpha_n\, GW, \quad q^* GW = i_\Delta GW$$

$$r^* GW = \sum_{\beta=\beta_1+\beta_2} i_\Delta GW_{\beta_1} \otimes GW_{\beta_2}. \quad \square$$