Итоговая конференция МЛЗС "Молодые математики-2020"
Рыбин Дмитрий

За время пока я состою в МЛЗС (с ноября 2018 года) у меня было 2 исследовательских проекта. Также я успешно представлял НИУ ВШЭ на математических олимпиадах всероссийского и международного уровня (IMC). В первые пол-года я, по наставлению своего научного руководителя Б.Л. Фейгина, руководителя Лаборатории Теории Представлений и Математической Физики НИУ ВШЭ, занимался когомологиями алгебр Ли. В итоге мы доказали теорему Лодэя-Квиллена-Цыгана о гомологиях $\mathfrak{gl}_\infty(A)$:

$$H_*(\mathfrak{gl}_\infty(A)) \cong \Lambda^\bullet(\mathrm{C}H_*(A)[1])$$

Данный результат был оформлен в качестве курсовой.

С лета я занимаюсь комбинаторикой и статистикой представлений $\mathfrak{sl}_n$, хотя основной мой интерес (учебный и исследовательский) связан с математической физикой (в частности, с алгебрами Каца-Муди и квантовыми группами), теорией полей классов и К-теорией.

В качестве доклада хочу представить результат из комбинаторики (возможно, ранее нигде явно не упоминавшийся), который получился в связи с исследованиями так называемого q-характера.

q-характер представлений $\mathfrak{sl}_n$

Рассмотрим следующую комбинаторную задачу: пусть зафиксировано натуральное число S и в прямоугольнике $a \times b$ $(a < b)$ расставлены неотрицательные целые числа в клетках так, что сумма чисел по любому пути, идущему из левого нижнего угла в верхний правый шагами вверх или направо, не превосходит S. Сколько таких расстановок чисел имеется? Какова производящая функция для суммы чисел в клетках?

Ответ. $s_\lambda(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{a}, \underbrace{q, ..., q}_{b})$, где λ - прямоугольник размера $S \times \min(a, b)$, и s_λ - многочлен Шура.

Следствие. *Мат. ожидание суммы чисел при таком заполнении равняется:*

$$S\frac{ab}{a+b}$$

Доказательство. Такое мат. ожидание - это значение производной производящей функции при $q = 1$, делённое на значение самой функции при $q = 1$. Производная равняется

$$b \cdot s'_\lambda(1, ..., 1)$$

Здесь s'_λ это частная производная многочлена Шура по любой переменной. Её можно вычислить с помощью тождества:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, ..., x_n) = \deg f \cdot f$$

которое выполнено для любого однородного многочлена. Используя симметричность многочленов Шура, имеем:

$$(a+b) \cdot s'_\lambda(1, ..., 1) = S \cdot a \cdot s_\lambda(1, ..., 1)$$

Чем заканчивается доказательство следствия. □

Доказательство того, что производящая функция - специализация многочлена Шура основано на том, что обе величины оказываются q-характером представления $\mathfrak{sl}_n$ старшего веса $\lambda = S \cdot \omega_i$. За базовыми определениями, связанными с алгебрами Ли, отсылаем читателя к [3].

Обозначим за $V(\sum m_i\omega_i)$ неприводимое представление $\mathfrak{sl}_n$ старшего веса $\lambda = \sum m_i\omega_i$. Его можно определить как $(\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_n) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{n}^+)} \mathbb{C}_\lambda)/M$, где $\mathbb{C}_\lambda$ это одномерное представление $\mathfrak{h}$ с действием α_i умножением на m_i, и M это максимальный подмодуль. Такое описание позволяет определить следующий инвариант:

Рассмотрим фильтрацию на $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ определённую как

$$\mathrm{U}^s(\mathfrak{g}) = \mathrm{span}\langle \prod_i x_i | x_i \in \mathfrak{g} \rangle$$

где произведение содержит не более s элементов. Это фильтрация из стандартного доказательства PBW теоремы. Её ограничение на $V(\lambda)$ задаёт q-характер.

Определение. q-характер это:

$$\mathrm{ch}_q V(\lambda) = \sum_s \dim V^s(\lambda)/V^{s-1}(\lambda) \cdot q^s$$

Удовлетворительного описания q-характера неизвестно.

FFLV многогранник ([1]) для неприводимого представления $V(\sum m_i\omega_i)$ для типа A это выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Его целые точки состоят в явной биекции с базисом в $V(\sum m_i\omega_i)$. Более того, этот базис позволяет считать введённую ранее градуировку как сумму координат.

Зададим s_{ij}, $i<j$ как координаты в $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Определим путь Дика p из $\alpha_{i,i}$ в $\alpha_{j,j}$ как последовательность положительных корней таких, что следующий получается из предыдущего либо удалением простого корня с наименьшим индексом, либо добавлением нового корня с наибольшим индексом. Имя происходит из геометрической картинки такой последовательности.

Для каждого пути зададим неравенство $\sum\limits_{\alpha_{i,j}\in p} s_{ij} \leq m_i+m_{i+1}+...+m_j$. Все они вместе определяют выпуклый многогранник, называемый FFLV многогранником.

Для заданной целой точки $(s_{ij})_{1\leq i<j\leq n-1}$, соответствующий базисный вектор в $V(\lambda)$ это

$$\prod_{i<j} E_{i,j}^{s_{ij}} v_\lambda,$$

где $v_\lambda = 1\otimes v \in (\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_n)\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)}\mathbb{C}_\lambda)/M$. Доказано, что они образуют базис в $\operatorname{gr} V(\lambda)$. И потому тривиально имеют градуировку $\sum s_{ij}$.

Пример. Пусть $n=3$, $m_1=2$, $m_2=1$. Имеем 2 фундаментальных веса ω_1,ω_2, и 3 положительных корня: $\alpha_{1,1},\alpha_{1,2},\alpha_{2,2}$, с соответсвующими координатами s_{11},s_{12},s_{22}. Неравенства:

$$0\leq s_{11}\leq m_1=2,\ 0\leq s_{22}\leq m_2=1,$$

$$s_{11}+s_{12}+s_{22}\leq m_1+m_2=3$$

Имеется 15 целых точек. Соответсвующий q-характер имеет вид:

$$1+3q+5q^2+6q^3$$

Доказательство. (ответа на комбинаторную задачу) Рассмотрим присоединенное действие GL_{a+b} на $\mathfrak{sl}_{a+b}$, оно продолжается до действия на $V(S\cdot\omega_a)$, с характером s_λ, где λ - прямоугольник из a строк длины S. Подействовав на всё представление матрицей $\operatorname{diag}(\underbrace{1,1,...,1}_{a},\underbrace{q,...,q}_{b})$ и взяв след, с одной стороны получим:

$$s_\lambda(\underbrace{1,1,...,1}_{a},\underbrace{q,...,q}_{b})$$

С другой стороны, по определению базиса происходящего из FFLV многогранника, только $E_{k,l}$ (матричные единицы как элементы $\mathfrak{sl}_{a+b}$) с $l \geq a$ и $k \leq a$ представляют для нас интерес, но они (и только они) умножаются на q под сопряженным действием матрицы выше. И $\prod_{i<j} E_{i,j}^{s_{ij}}$ умножается на $q^{\sum s_{ij}}$, таким образом действие на $\operatorname{gr} V(\lambda)$ диагонально и даёт q-характер. $\square$

Список литературы

[1] Evgeny Feigin, Ghislain Fourier, Peter Littelmann

PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n

https://arxiv.org/abs/1002.0674

[2] Xin Fang, Ghislain Fourier, Peter Littelmann

On toric degenerations of flag varieties

https://arxiv.org/abs/1609.01166

[3] J.E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation Theory. Graduate Texts in Math., vol. 9, Springer -Verlag (1970).