Бирациональные инв-ты из симплектической геометрии

Людмил Кедерков

21.12.19.

лекция №4.

Идея док-ва основной теоремы

<u>Теорема</u> $X \to S$ — расслоение на коники
$\phantom{X \to{}} \cup$
$\phantom{X \to{}} C$ с кривой вырождения C

Если X деформируется в X', так что
$X' \longrightarrow S'$
$\cup$
$ C'$

к незначительными особенностями: $H^*(X') = H_{X_1} + \dots + H_{X_k}$ где H_{X_i} функтор Серре не является ф.С. кривой

$\Rightarrow$ X не рационально.

Рассмотрим кривую $C \subset \mathbb{P}^2$ степени 12.

$X \to \mathbb{P}^2 = S$ $\quad JX = \mathrm{Prym}(\tilde{C}, C)$

$\dim JX = \dim \mathrm{Prym}(\tilde{C}, C) = 54$

$\tilde{C} \xrightarrow{2:1} C$ $\quad \deg C = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow p(C) = 55 \Rightarrow p(\tilde{C}) = 109$

критерий Саркисова

$|4K_S + C| \neq \varnothing \Rightarrow X$ не рационально

Конструкция Борделли

X - произвольной разм-ти,

X' - вырождение

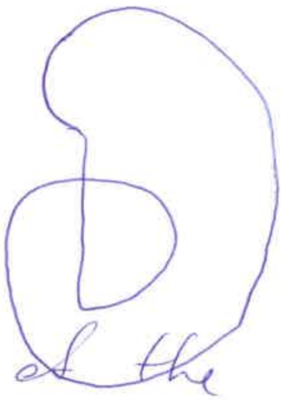
критерий рациональности

формулируется в терминах MHS от X',

а именно в терминах расширений

чистых структур Ходжа, соотв. X'.

$X \rightsquigarrow X'$



N - degree of the cone

$\deg P(x_1, \ldots, x_{n+1}) = N$, $P(x_1, \ldots, x_{n+1}) = t$

ВО вещественно с земнятое

$2n-1$ мерное мн-во, границ

цилиндрической окр-ти исключи-

тельного дивизора T (Снаружи

X' в особой точке)

Введем следующие части структуры Ходжа

- $H^i_{inner} = \ker H^i(\hat{X} - D) \to H^i(\partial D)$
$$i \in [1, \dots, 2n-1]$$

- H^{n-1}_{prim} — примитивная часть $H^{n-1}(D)$ веса $(n-1)$.

- $V^{n-1} \subset H^{n-1}_{prim}$ веса $(n-1)$ — образ $H^{n-1}(\hat{X} - D)$ в H^{n-1}_{prim}

- H^n_{prim} — примитивная часть веса n в H^n (n-мерное гладкое собственное многообразие, заданное ур-ем $P(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+2}^N$.

$H^i(\partial D)$	$H^i(\hat{X}-D)$	$H^i(D)$	$H^i(P=0)$	$H^i(\hat{X})$	$\lim_{t\to 0}(H^i(X_t))$	i
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$		$i=0$
	H^i_{inner}			H^i_{inner}	H^i_{inner}	$1 \le i \le 2n-1$
$\mathbb{Z}(-n)$						$i=2n-1$
				$\mathbb{Z}(-n)$	$\mathbb{Z}(-n)$	$i=2n$

$H^i(\partial D)$	$H^i(\tilde X - D)$	$H^i(D)$	$H^i(p=0)$	$H^i(\tilde X)$	$\lim_{t\to\infty} H^i(X_t)$	i
		$\mathbb{Z}(-j)$				$2\le 2j\le 2n-2$
H^{n-1}_{prim}	V^{n-1}	H^{n-1}_{prim}		V^{n-1}	$(V^{n-1})^{\perp}(-1)$	$n-1$
$H^{n-1}_{prim}(n-1)$	$V^{(n-1)\perp}(-1)$				H^n_{prim}	n
					$(V^{n+1})^{\perp}(-1)$	$n+1$

Случай $N=2$ соответствует квадратичным особенностям (тогда $V=0$). Мы хотим построить переменную картину на стороне теории Громова-Виттена. При раздутии потенциал Ландау-Гинзбурга умножается на ~~вес~~ x_{n+2}^2, в $D^b Coh$ ~~добавл~~ добавляется пара исключительных объектов, а в матрицу квантового умножения на c_1 $\left(\begin{array}{c|c} * & \\ \hline & ** \end{array}\right)$

Хотим переговорить результаты о теории Громова-Виттена на языке $\mathcal{D}$-модулей

Сейчас главная гипотеза (1980х.гг) для теории Громова-Виттена-

сходимость. Мы не будем ее использовать, оставаясь в рамках формальной геометрии. Нас интересует формулы для резултат на уровне квантовых когомологий - точнее для собственных значений $*c_1$

Идея поток Калера-Риччи не склеивает мнимые собственные зн-ия $*c_1$, а выталкивает их на бесконечность

Сначала в предположении сходимости сформулируем след. теорему:

$\boxed{\text{Theorem}}$ TFAE:

1) $\mathcal{H}^{germ}$ – росток $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ град. голоморфного векторного расслоения над $\mathbb{C}_u$ с голоморфной связностью,

u – координата

продолжение Биркгофа

имеющей ~~[illegible]~~ полюс порядка 2 в $u=0$

2) $\mathcal{H}^{alg}$, ∇ – алгебраическое векторное расслоение над $\mathbb{C}_u$ с алгебраической мероморфной связностью с полюсом порядка 2 в нуле и регулярной особенностью в ∞

3) Оснащенные мероморфные св-ти

$(\mathcal{E}, \mathcal{E}_+)$ — голономный алгебраический $\mathcal{D}$-модуль на $\mathbb{C}_t$, регулярный $t \to \infty$

$\mathcal{E}_+$ — когерентный $\mathcal{D}$-подмодуль в $\mathcal{E}$

удовлетворяющий условиям

* $\frac{d}{dt} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_n$ — изоморфизм

* $\mathcal{E}_+$ замкнут относительно $\left(\frac{d}{dt}\right)^{-1}$

* $\mathcal{E}/\mathcal{E}_+$ имеет ~~[illegible]~~ конечный носитель

* Оснащение $\mathcal{E}$ дает градуировку

$$\mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_n$$

4) Алгебраические мероморфные

связности уровня как условия

Утв Эта эквивалентность сохраняется, если в данные добавить спаривание и решётку, инвариантную относительно св-ти.

Основное утверждение (теорема о склейке)

Пусть задан набор дисков $D_1, D_2, \dots, D_k \subset D$

и набор оснащенных мероморфных св-ей $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k$. Тогда $\exists$ ~~конструкция~~ заданной канонической конструкцией вносит пучок $\mathcal{G}, \mathcal{G}_+$ на D такой, что

1) $R\Gamma(\mathcal{E}) = 0$

2) $\mathcal{E}(\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_{+i})$ имеет голоморфные ~~сингулярные~~ особенности на D_i

$(\dots)$ $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_k|_{D_i}$ $\mathcal{G}_{i+} = \mathcal{G}_+|_{D_i}$

Новых особенностей нет, поведение на бесконечности соответствует поведению — // — на бескон-ти $\mathcal{E}_i$.

Утв-ие Для D-модуля, приходящего из квантовых когомологий, D модуль раздутия $\tilde{X}$ приходят из D модуля мн-зия X и D-модуля исключ. дивизора этой конструкцией

Следствие Собственные зн-ия квантового умножения не склеиваются,