Бирациональные инварианты из симплектической геометрии

Людмил Кацарков

Лекция №3 (16)

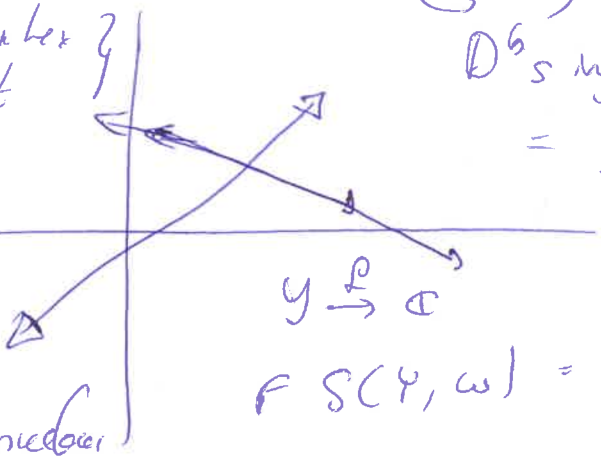
14. 12. 19

Замечание к упражнению, данному на прошлой лекции.

Зеркальная симметрия утверждает следующее соответствие

X — Фано $\qquad\qquad$ (Y, f) — м. Л. Г.

$D^b(X) = \{\text{complex}, \text{Ext}\}$ $\qquad$ $D^b_{sing}(Y, f) \cong MF(Y, f) = \bigcup_{t \in \mathrm{Sing}} D^b(Y_t)/\mathrm{Perf}(Y_t)$



$Y \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

$Fuk(X, \omega)$ $\qquad$ $FS(Y, \omega) = \{$сечения Лефшеца HF$\}$

компактные лагранжевые подмн-зия

Hom = HF

Можно думать про обе стороны как про извращенный пучок категорий + условие стабильности. Это имеет много следствий на уровне гомологий. Э. С. Мотивация для предсказаний связи гомологических инвариантов на левой стороне

Геометрическое отступление.

Начнем с гладкой трехмерной кубики

$X: x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$

Вопрос верно ли, что $\mathbb{C}(X) \stackrel{?}{=} \mathbb{C}(x_1, x_2, x_3)$

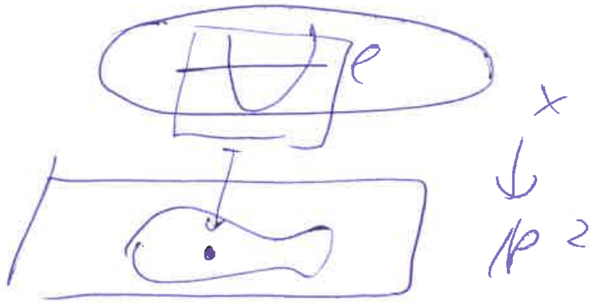
Попробуем построить на X коническое расслоение на коники. Рассмотрим прямую ℓ на X;

Гиперплоское сечение кубики ~~есть~~ это поверхность, на нем 27 прямых. Рассмотрим мн-во плоскостей ~~прямых~~ в $\mathbb{P}^4$, ~~через~~ проходящих через ℓ. Это семейство параметризуется

$\mathbb{P}^2$. Каждая из них пересекает ~~кубику~~ X по конике. Некоторые из них особые.

Мн-во в $\mathbb{P}^2$, отвечающее вырожденным

это дискриминантная кривая



Рассмотрим промежуточный якобиан

$J(X) = H^{2,1}(X) / H_3(X, \mathbb{Z})$

При раздутиях ~~[illegible]~~ мн-ые к $J(X)$ прибавляется якобиан кривой

т.е. X рационально $\Rightarrow \exists\, C \subset \mathbb{C}P^3$ $J(X) = J(C)$

~~Вопрос~~ ~~[illegible]~~ $\boxed{\text{Заметим, что codim } \Theta_{sing} \geq g-4 \quad g = \dim_{\mathbb{C}} JC}$

Отображение $X \to \mathbb{C}P^2$ определяет двулистное накрытие над дискриминантной кривой $\begin{matrix} \tilde{C} \\ \downarrow 2:1 \\ C \end{matrix}$ ($\tilde{C}$ параметризует кривые, в которые вырождается коника).

$\deg C = 5 \Rightarrow g(C) = 6 \Rightarrow g(\tilde{C}) = 11$

Прим $\tilde{C}, C$ определяется как

$(1 - i^*)\, J\tilde{C} = \mathrm{Prim}(\tilde{C}, C)$

антиинволюция
антиинвариантная часть под действием этого автоморфизма

Уть $J(X) \simeq \mathrm{Prim}(\tilde{C}, C)$

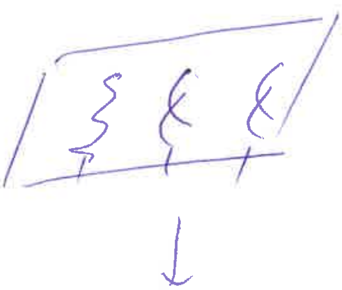
Th (Мемфорд) Пусть Z - ~~[illegible]~~ кривая: $\mathrm{Prym}(\tilde{C}, C) = JZ$

Тогда выполнено одно из следующих условий:

1) C - гиперэллиптическая
2) C - тригональная
3) C - плоская квинтика и θ-характеристика нечетна

Утв (Клеменс) В случае кубики мы попадаем в случай 3), но θ-характеристика ~~не~~ четна $\Rightarrow$ X не рациональна.

Для кубики X выполнено зеркальная симметрия: модели LG $(\mathbb{C}^{\times})^3$, $f = \frac{(x+y+z)^3}{xyz} + t\,a$



$\mathbb{C}P^1$

– семейство K3-поверхностей с 3 особыми слоями, 2 из которых – двойные точки, и один очень особый. На уровне зеркала они соответствуют следующим полуортогональное разложение

$$\langle A, E_1, E_2 \rangle = D^b(X)$$

и функтор Серра φ: $\varphi^5 = [3]$

Мы будем изучать некое семейство K3 поверхностей с помощью извращенного пучка $\mathcal{F}$ исчезающих циклов

Известно, что $\dim H^i(\mathcal{F}) = \begin{cases} 5 & i=1 \\ 4 & i=2 \\ 5 & i=3 \end{cases}$

Монодромия обхода вокруг особого слоя индуцирует квазиунипотентный оператор ρ на $H^2(\bar{Y}_t)^{tr}$

с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$

<u>Утв</u> (Кузнецов–Пржиялковский)

X – 3х мерное гладкое Фано $\mathrm{Pic}\, X = 1$,
Тогда X не рациональное $\Leftrightarrow$ ρ строго квазиунипотентное

Утв X - гладкое Фано. Тогда существует

разложение $H^*(X) = \bigoplus_{\lambda_i} H_{\lambda_i}$

λ_i - собственное значение оператора

$(c_1(T_X) *_q)$ на $QH^\circ(X)$

Это разложение является биресционельным инвариантом по модулю вкладов подмногообразий коразмерности 2 и по модулю действия S_n

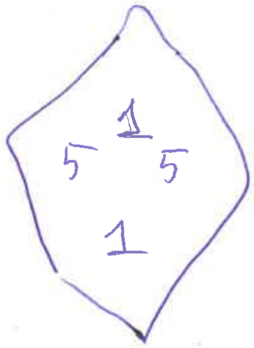
Мы будем рассматривать это разложение в категории некоммутативных (поляризованных) структур Ходжа

[Целочисленные структуры игнорируем.

Гамма-гипотезу. Нам понадобится только поляризация, но не целочисленные структуры].

<u>Примеры</u> 1) X гладкая трехмерная кубика

Тогда $H^0(X) = H_{\lambda_1} + \langle 1 \rangle_{\lambda_2} + \langle 1 \rangle_{\lambda_3}$



H_{λ_1} не может происходить из раздутия вдоль кривой. Это видно из рассмотрения ~~функторе~~ пересечение серре $\varphi^5 = [3]$ на H_{λ_1} (на кривой, функтор серре-умножение на линейное расслоение α степени $g-2$, т.е. ~~еф~~ не соотв. еф. на ~~еф~~ вдоль ~~ед~~ нет еф-ры колебр-яд)

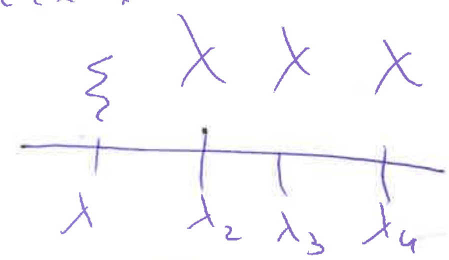
2) Пусть X можно продеформировать к X', на котором есть разложение такого вида. Тогда на X тоже есть такое разложение и X не разложимо

3) Пусть λ – общая четырехмерная кубика

Тогда $H^*(X) = H_\lambda + \langle 1\rangle + \langle 1\rangle + \langle 1\rangle$

H_λ не может происходить из модуля в поверхности общего типа:

действительно,



спаривание на H_λ симметричное,

а не ст-ре для пов-ти общего типа несимметричное.

4) Гипотетически, предыдущий аргумент можно обобщить на случай ~~квад~~ расслоений на квадрики

Напомним, что для расслоений на коники не X исключительного набора, ~~не имеют~~ не $D^b(X)$ вида $\langle \alpha; E_1, E_2 \ldots \rangle$

и можно переформировать соответствующую структуру к резиотечно виде

$$H_X \otimes \mathcal{A}\langle 1\rangle \oplus \langle 1\rangle + \langle 1\rangle + \dots$$

и сравнить функтор Серре на H_X и функтор Серре на кривой.

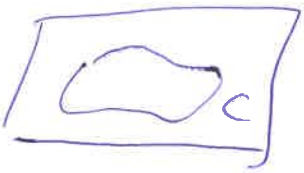
Теперь к расслоениям на квадриках

Возвращаемся к нашей картине (но в размерности на 1 больше)

$$x_0^3 + x_1^3 + \dots + x_5^3 = X$$

$$D^b(X) = \langle \mathcal{A}, E_1, E_2, E_3 \rangle$$

$$X \downarrow$$



$\mathbb{P}^2$

$\deg C = 6$

~~Дополнительный кусок $\mathcal{A}$ может иметь функ из двух видов: это~~

$\mathcal{A} = D^b(K3)$

Гипотеза X - расслоение на квадриках

X выражается $S_0 X'$ пучок, что степень — 9 — кривая вообще 6, без сечений

Тогда X не рациональна. □

Идея док-ва: X' - расслоение на квадрики

рассмотрим категорию $D^b(\mathcal{A})$ ($D^b(\mathcal{A})$)

Пусть не существует векторов

$\alpha_1, \alpha_2 \in K(\mathcal{A})$, т.ч. $\chi(\alpha_1, \alpha_2) = 0$
$\chi(\alpha_1, \alpha_2) = 1$

Тогда X не рациональна