Бирациональные инварианты из симплектической геометрии

Семинар №1 (13) 11.12.2019.

В. Рогов

① Штейновы многообразия

<u>Задача</u> придумать аналог понятия аффинного многообразия в комплексной геометрии

<u>Замечание</u> В алгебраической геометрии, подмногообразие аффинного пространства определяется кольцом алгебраических функций. В комплексной геометрии такого нет. Например, по лемме Хартогса, для шара $B=\{|z|=1\}\subset\mathbb{C}^n$, $n\geq 2$ и $B^*=B-\{0\}$ вложение $B^*\hookrightarrow B$ индуцирует

$$\mathcal{O}(B)\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}(B^*)$$

<u>Опр.</u> $D\subset\mathbb{C}^n$ – область голоморфности, если

$$\forall D'\supset D \text{ – большей области}$$

$$\mathcal{O}(D')\not\twoheadrightarrow\mathcal{O}(D)$$

<u>Утв</u> Следующие свойства области $D\subset\mathbb{C}^n$ экв-тны

1) D – область голоморфности.
2) $\forall x\in\partial\bar{D}\ \exists f_x\in\mathcal{O}(D):\ \forall x_n\in D\ x_n\to x\ f_x(x_n)\to\infty$
3) $\exists f\in\mathcal{O}(D):\ \forall x\in\partial\bar{D}\ \forall x_n\to x\ f(x_n)\to\infty.$

Мы хотим охарактеризовать области голоморфности во внутренних терминах.

<u>Опр</u> $f \in \mathcal{O}(S)$ — плюригармоническая ф-ция на S, если форма Леви $\omega_f := dd^c f$ положительна на S, т.е.

$$g_f(\cdot,\cdot) := \omega_f(J\cdot,\cdot) \text{ — риманова метрика.}$$

<u>Утв</u> Следующие условия эквивалентны

1) $\exists$ голоморфное вложение $S \hookrightarrow \mathbb{C}^n$, образ которого — область голоморфности.

2) $\exists$ голоморфное замкнутое вложение $S \hookrightarrow \mathbb{C}^N$

3) $\exists$ $f \in \mathcal{O}(S)$ — плюригармоническая

S, удовлетворяющее одному из этих условий, называется Штейновым многообразием.

<u>Замечание</u> компактное аналитическое подмногообразие Z Штейнова многообразия S нульмерно.

Действительно, координатные функции

$$S \subset \mathbb{C}^N \xrightarrow{z_i} \mathbb{C} \quad \text{постоянны.}$$

<u>Идея</u> По произвольному комплексному многообразию X попробуем получить многообразие без компактных комплексных подмногообразий, „стянув" их все в точку.

Опр X - компактное комплексное мн-зие. Пара $Sh(X)$ и $sh_X : X \to Sh(X)$ называется многообразием и отображением Шафаревича соответственно, если: sh_X - мероморфное от-ие со связными слоями; существует счетное мн-во замкнутых подмн-зий $D_i \subsetneq X$ таких, что $\forall Z \subset X$ неприводимого $Z \not\subset \cup D_i$

$$sh_X(Z) = \{pt\} \iff \operatorname{im}[\pi_1(Z) \to \pi_1(X)] \text{ конечна.}$$

Утв (Коллар) Пара $(Sh(X), sh_X)$ существует и единственна с точностью до бирационального преобразования.

② Гипотеза Шафаревича

Опр Мн-зие Z голоморфно выпукло, если $\exists (S, p)$, S - штейново, $p: Z \to S$ - собственное голоморфное отображение. p называется редукцией Картана-Ремерта.

Гипотеза (Шафаревич) X - компактное келерово многообразие, $\tilde{X}$ - универсальное накрытие. Тогда $\tilde{X}$ голоморфно выпукло.

Замечание X удовлетворяет Гипотезе $\Rightarrow$ $p_{\tilde{X}} : \tilde{X} \to S$ индуцирует отображение Ш. $sh_X : X = \tilde{X}/\pi_1(X) \xrightarrow{p_{\tilde{X}}} Sh(X) = S/\pi_1(X)$

Замечание. От условия кэлеровости избавиться нельзя. Действительно рассмотрим поверхность Хопфа H. Это компактное комплексное мн-зие, которое может быть представлено как

$$H = \mathbb{C}^2 - \{0\}/\mathbb{Z}$$

Для нее гипотеза Шафаревича не верна, так как $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ не голоморфно выпукло. Шафаревич мотивировал свою гипотезу классификацией в размерности 1 = теоремой униформизации. Свойства голоморфно-выпуклых многообразий обобщают св-ва $\{\mathbb{CP}^1, \Delta, \mathbb{C}\}$.

Замечание * Пусть Z - голоморфно-выпуклое многообразие, $Z' \subset Z$ - связное компактное подмногообразие. Тогда Z' лежит в слое p-редукции Картана-Ремерта (это сразу следует из отсутствия связных компактных подмн-зий в штейновом мн-зии)

* Пусть z_n - посл-ть на Z без предельных точек. Тогда $\exists f \in \mathcal{O}(Z) : f(z_n) \to \infty$.

Действительно, последовательность $f(z_n)$ тоже не имеет предельных точек

$\Rightarrow$ $f(z_n) \to z_\infty \in \partial \bar{S}$. По определению области гол-ти, $\exists f \in \mathcal{O}(S)$: $f(z_\infty) = \infty$

и искомая функция это просто подтест f.

* Не Z не существует последовательность различных кривых $C_i \subset Z$, $i \in \mathbb{N}$, таких, что $\cup C_i$ связно. Действительно, в противном случае для пос-ти $z_n \in C_n$ без предельных точек и $\forall f \in \mathcal{O}(S)$

$f(z_n) = f/_{C_n}(z_n) \equiv const$ что влечет пр-ие.

Это очень важное препятствие к голоморфной выпуклости. $\square$

Выведем гипотезу Шафаревича для кривых из теоремы Униформизации

Пример ① Пусть X - компактное келерово односвязное мн-зие. Тогда редукция КР имеет вид

$$\tilde{X} \cong X \to \{pt\} \cong S$$

т.е. X удовлетворяет г. Шафаревича. Например $X \cong \mathbb{CP}^1$

② Пусть $X \cong T^n$ — комплексный тор. Тогда $\tilde{X} \cong \mathbb{C}^n$ — очевидно штейново в частности, Σ рода 1 удовл. гипотезе Шафаревича

③ Пусть $X \hookrightarrow Y$ — замкнутое вложение и Y удовлетворяет гипотезе Шафаревича. Тогда

$$\tilde{X} \hookrightarrow \tilde{Y} \text{ — замкнутое вложение}$$

$$\tilde{Y} \text{ штейново} \Rightarrow \tilde{X} \text{ штейново}$$

Напомним, что кривая Σ рода $g \geq 2$ ~~вкла~~ допускает замкнутое вложение в якобиан $J(\Sigma)$, являющийся абелевым мн-ием. Для него выполнена г. Шафаревича (см. пример 2) $\Rightarrow$ для Σ тоже выполнена г. Шаф-ча.

③ <u>Гипотеза Шафаревича для $\pi_1 = \mathbb{Z}^n$</u>

Начнем с легкого замечания:

<u>Замечание</u> Пусть для X верна г. Шаф-ча, $f: Y \to X$ – голоморфное отображение, для которого $f_*: \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ не имеет ядра. Тогда для Y тоже верна г. Шаф-ча.

Действительно, f индуцирует $\pi_1(Y)$ эквивариантное от-ие $\hat{f}: \hat{Y} \to \hat{X}$, про которое достаточно док-ть, что оно собственное. Рассмотрим компакт $K \subset \hat{X}$ и $K' := \hat{f}^{-1}(K) \subset \hat{Y}$. Y ~~конечно~~ компактно, так что достаточно показать, что $K' \to Y$ конечно, т.к. K' конечно пересекается с любой орбитой $\pi_1(Y)$. Это следует из конечности пересечения компакта K с любой орбитой $\pi_1(Y)$ и из того, что в каждом слое проекции $\hat{Y} \to Y$ лишь 1 точка лежит на данной орбите $\square$

Это замечание обобщается на произвольн. f. Чтобы это сделать, ~~отв~~ введем H-гипотезу Шафаревича

<u>Опр</u> X – компактное, келерово – удовлетворяет H гипотезе Шафаревича, $H \subset \pi_1(X)$ если

$$\tilde{X}/H \text{ – голоморфно выпукло}$$

□

<u>Замечание</u> Как и в случае $H = \{e\}$ Коллар предлагает искать док-во гипотезы Шафаревича с изучения отображения и многообразия Шафаревича

$$s^H : X \to S_H(X)$$

(определение аналогично случаю $H = \{e\}$)
Если H-г. Шафаревича доказана для X, то $S_H(X) = \widetilde{S_H(X)}/H$, где $\widetilde{SH(X)}$ – редукция к.-р. для $\tilde{X}/H$.

<u>Лемма</u> Пусть для X верна H-гипотеза Шафаревича, $f: Y \to X$ – голом. от-ие. Тогда для Y верна $f_*^{-1}(H)$ гипотеза Шаф-ча,

Эта лемма позволяет производить различные конструкции с многообразиями, для которых доказана H-гипотеза Шаф-ча: раздутие, гиперплоские сечения, накрытия

__Сл__ Пусть X - компактное многообр., $\pi_1(X)\cong \mathbb{Z}^n$

Тогда X удовл. гипотезе Шафаревича

__Док-во__ Рассмотрим многообразие Альбанезе от X. Это прямое обобщение якобиана кривой.

Напомним конструкцию

Т. посл-ть Экспоненты $0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{n\mapsto 2\pi i n}\mathcal{O}\xrightarrow[f\mapsto e^f]{}\mathcal{O}^*\to 0$

влечет длинную точную посл-ть гомологий

$$H^1(X,\mathcal{O})\to Pic(X)=H^1(X,\mathcal{O}^*)\xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z})\to H^2(X,\mathcal{O})$$

Это посл непрерывных абелевых групп

$H^2(X,\mathbb{Z})$ дискретно $\Rightarrow$ $Pic^0(X)=\ker c_1$

$H^0(X,\mathcal{O})\to H^0(X,\mathcal{O}^*)$ сюръективно

$\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$

$\Rightarrow$ имеем следующую посл-ть

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(X,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[dr] & H^1(X,\mathcal{O}) \arrow[r] & Pic^0(X) \arrow[r] & 0 \\
& & H^1(X,\mathbb{C}) = H^{1,0}\oplus H^{0,1} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

т.о. $\mathrm{Pic}^0 = H^1(X,\mathcal{O})/H^1(X,\mathbb{Z})$ — комплексный тор

<u>Мн-зие Альбанезе</u> это тор, двойственный $(\mathrm{Pic}^0)^\vee$

$$\mathrm{Alb}(X) := (\mathrm{Pic}^0)^\vee = (H^1(X,\mathcal{O}))^* / (H^1(X,\mathbb{Z}))^* \cong$$

$$\cong H^0(X,\Omega^1)^* / H_1(X,\mathbb{Z})$$

где в последнем выражении вложение $H_1(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^0(X,\Omega^1)^*$ задается инт-ием

Это обобщает определение для кривой Σ (на Σ есть каноническая поляризация, задающая изоморфизм $\mathrm{Pic}^0 \cong \mathrm{Alb} \cong J(\Sigma)$).

Как и для якобиана, имеется каноническое отображение

$$x_0 \in X \xrightarrow{\alpha} \frac{H^0(X,\Omega_1)^*}{H_1(X,\mathbb{Z})} = \mathrm{Alb}(X)$$

$$x \mapsto \int_{x_0}^{x}$$

Это универсальное от-ие в комплексный тор

Если $\pi_1(X) = \mathbb{Z}^4$, отображение α индуцирует $\alpha_* \pi_1(X) \cong \pi_1(\mathrm{Alb}(X)) \Rightarrow$ гипотеза Ш. для X следует из гипотезы Шафаревича для торе $\mathrm{Alb}(X)$. □

④ Случай нильпотентной группы $\pi_1(X)$

Мы хотим провести то же доказательство, что и для $\pi_1(X)=\mathbb{Z}^n$, для нильпотентной группы.

Построим аналог $Alb(X)$ и отображение, индуцирующего изоморфизм на π_1

По определению, $\pi_1(X)$ нильпотентна, если следующий ряд конечен

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_0 & \leftarrow \Gamma_1 \leftarrow & \dots & \leftarrow & \Gamma_n \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ H_1 & \leftarrow & \dots & \leftarrow & \pi_1 \end{array}$$

$$\Gamma_i = \pi/\Gamma^{n-i}, \quad \Gamma^i = [\pi_1, \Gamma^{i-1}]$$

<u>Утв</u> (теорема Мальцева) существует согласованные последовательность вложений

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(X,\mathbb{Z})=\Gamma_0 & \leftarrow & \Gamma_1 & \leftarrow & \dots & \leftarrow & \Gamma_n \\ \cap & & \cap & & & & \cap \\ H_1(X,\mathbb{R})=G_0 & \leftarrow & G_1 & \leftarrow & \dots & \leftarrow & G_n \end{array}$$

групп Γ_i в нильпотентные группы Ли. Другими словами, существует функториальная конструкция, вкладывающая нильп группу в нильпотентную группу Ли, переводящее центральный ряд в центральный ряд и действующая на абелевых группах тензорным умножением на $\otimes\mathbb{R}$

Образ вложения это всегда решетка

Конструкцию Мальцева можно проделать явно: абелевой группе сопоставляем $A\otimes\mathbb{R}$; расширению групп, для ~~[illegible]~~ которых нам уже известна конструкция, сопоставляем расширение соответствующих групп Ли (с тем же коциклом).

Рассмотрим соответствующую посл-ть алгебр Ли

$$\mathfrak{g}_0 \leftarrow \dots \leftarrow \mathfrak{g}_n$$

<u>Теорема</u> (Хайн) X – компактное кэлерово $\mathfrak{g}_n$ – алгебра Ли в категории смешанных структур Ходжа, весовая фильтрация которой имеет вид

$$\mathfrak{g}_n / W_{\cdot}\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}.$$

На философском уровне, причина существования такой смешанной структуры Ходжа такая же, как в рациональной теории гомотопий. А именно, любое унипотентное пр-ие π_1 пропускается через G_n $\Rightarrow$

G_n контролирует унипотентные локальные системы, т.е. расширения постоянной локальной системы собою.

В свою очередь $Ext^1(\underline{\mathbb{R}}, \underline{\mathbb{R}})$ связан с группой же нет, на которой есть фильтрация Ходжа 0.

<u>Опр</u> $Alb^s(X) = \Gamma_s \backslash G_s / \exp(F^0)$

Например $Alb^0(X) = \dfrac{H_1(X,\mathbb{R})}{H_1(X,\mathbb{Z})} \Big/ H_{-1,0} = (H^1(X,\mathcal{O}))^* = Alb(X)$

Мы получаем следующую „башню Постникова"

$$\begin{array}{ccc} Alb^s & \xleftarrow{\alpha_s} & X \\ \vdots & \swarrow{\scriptstyle \alpha = \alpha_0} & \\ Alb^0 & & \end{array}$$

Заметим, что $\widetilde{Alb^s} \cong \mathbb{C}^{n(s)}$ и $(\alpha_s)_* : \pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(Alb)$

<u>Утв</u> (Кацарков) $\pi_1(X)$ нильпотентна $\Rightarrow$ X уровня Линделёфа Шафаревича

⑤ Случай линейной группы $\pi_1(X)$

Утв [EKPR 09] X – компактное, кэлерово
$$H = \bigcap_{\rho: \pi_1(X) \to GL(n)} \ker \rho,$$ тогда X удовлетворяет

H-гипотезе Шафаревича

Следствие Пусть $\pi_1(X)$ допускает вложение в $GL(n)$ (т.е. $\pi_1(X)$ линейно), тогда X удовлетворяет гипотезе Шаф-ча.

Два шага в доказательстве

* Построить H-мн-зие Шафаревича, обобщающее якобиан (альбанезе, Alb^S, ...) с помощью неабелевой теории Ходжа
* Доказать, что H-мн-зие Шафаревича штейново.