Бирациональные инварианты из симплектической геометрии

Ян Пин Ли

коллоквиум МЛЗС №1 12.12.19

(лекция №14)

Functoriality of Gromov-Witten theory (joint works /w H-W. Lin and C-L. Wang + others).

Main concern study how GWT changes under (generalized) birational maps

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & P \arrow[d, "\pi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Мы факторизуем отображение $f: X \to Y$ через вложение. Так что наши исследования мы начнем с изучения функториальности относительно вложений.

Мы рассмотрим специальный случай $X \hookrightarrow P$ - полное пересечение.

Мы будем работать аналогично с „классическим" случаем - обычными гомологиями.

В случае полных пересечений классический результат - ~~кванто~~ теорема Лефшеца о гиперплоском сечении. В случае тождеств. инволюции классический результат — ~~кв~~ теорема Лере-Хирша. Нас интересуют квантовые версии этих теорем.

Простейшее в классическом случае ~~бирациональное~~ пр-ое — раздутие. Для квантовых когомологий простейший случай приходит из рассмотрения K-эквивалентных бирациональных отображений. Например, флопов:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ X \arrow[rr, dashed] & & X' \end{tikzcd} \qquad \pi^* K_X \sim \pi'^* K_{X'}$$

В этом случае определено стягивание флопа (возможно, особое)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\ & \bar{X} & \end{tikzcd}$$

Пример — 3х мерный флоп (A-флоп)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1) \cong N_{C|X} \arrow[d] & & \\ X \supset C \cong \mathbb{P}^1 \arrow[dr] & & \mathbb{P}^1 \cong C' \subset X' \arrow[dl] & (-1,-1) \arrow[l] \\ & \bar{X} & \end{tikzcd}$$

стягивание кривой C

В этом случае, Y содержит $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $N_{E|Y} = \mathcal{O}(-1,-1)$

В этой ситуации можно сформулировать самый красивый результат о функтор-ах.

<u>Несколько свойств</u>. Пусть задана k-экв-ть: $X \to X'$

- <u>Thm</u> (1) $b_i(X) = b_i(X')$ $\forall i$

  — „мотивное интегрирование" Батырева, Концевича и компании.

  (2) Более того $CH(X) \overset{\exists}{=} CH(X')$

  Тем не менее, $\exists$ не сохраняет стр-ру умн-ия.

  (3) $QH(X) \cong QH(X')$

  this is true after analytic continuation

  QH определены над кольцом рядов

  В нем можно делать аналитические замены переменных

  (4) k-эквивалентность влечет равенство размерностей <u>vir</u> $\dim M_{g,n}(X,\beta) = \mathrm{vdim}\, M_{g,n}(X',\beta)$,

  т.к. $\mathrm{vdim} = -K_X\beta + (\dim X - 3)(1-g) + n$

GWT изучает отображения кривых в наше мн-зие в фиксированном классе. Это

Очень глобальное определение

$$Z \subset X \leftarrow\cdots\rightarrow Z' \supset X'$$

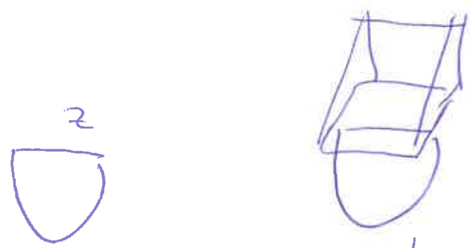
$$X/Z = X'/Z'$$

В целом мы хотим придумать некоторую теорию GWT, чтобы $GWT(X) = GWT(X/Z) + GWT(N_{Z/X})$ но это совершенно не верно.
Этому можно придать некоторый смысл

Рассмотрим следующую конструкцию

продеформируем $X \to Bl_Z X \cup_{\mathbb{P}_Z(N_{Z/X})} \mathbb{P}_Z(N \oplus \mathcal{O})$

$\mathfrak{X} = Bl_{Z\times\{0\}}(X \times \mathbb{A}^1_t)$: $\mathfrak{X}_{t\neq 0} \cong X$, $\mathfrak{X}_{t=0} \cong$



Дадим следующее определение

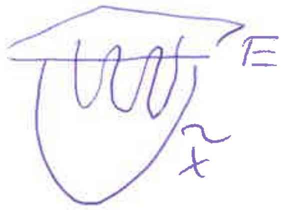
$$GWT(X) = \sum RGW(\tilde{X}, E) * RGW(P, E)$$

— относительная теория Громова–Виттена относительно "дивизора", тут $X \overset{?}{=} \tilde{X} \cup_E P$

Что такое $RGW(\tilde{X}, E)$? Пусть $\beta \in H_2(\tilde{X}) : \beta E = d$

рассмотрим разбиение $\sum_{i=1}^{\ell} n_i = d$ и

пространство кривых с ℓ отмеченными точками, таких, что Σ пересекает E в i-ой отмеченной точке пересечением со степенью n_i.



$$GWT(X) = \sum RGW(\tilde{X}, E) * RGW(P, E)$$

$$\|$$

$$GWT(X') = \sum RGW(\tilde{X}', E) * RGW(P', E)$$

и чтобы доказать искомое надо было бы проверить, что происходит с этими P, E и P', E

Изучим "ordinary flips" (r, r') $r \geq r' \geq 1$

$F, F' \to S$

$rk\,F = r$

$rk\,F' = r'$

$r = r'$ — Ord flop

blow up $r' = 1$

$X \supset Z = \mathbb{P}_S(F)$ $\quad \mathbb{P}_S(F') = Z' \subset X'$

$N_{Z/X} \cong F' \otimes \mathcal{O}(-1)$

$r \neq 1$ Curve classes remain of the same dim

$r = 1$ $\quad rk\, Pic(X) = rk\, Pic(X') + 1$

В классической ситуации $CH(X') \overset{\exists}{\hookrightarrow} CH(X)$

$\exists$ увлекает спаривание Пуанкаре

$$CH(X) \cong CH(X')^{\perp_P} \oplus K$$

На уровне инвариантов Громов-Виттена

Гипотеза $GWT(X') \hookrightarrow GWT(X)$

after · analytic continuation

· non-linear change of frame

· non linear change of variable

For blow ups If $Z \subset X$ complete int

$$Bl_Z X \subset \mathbb{P}_Z(E)$$
$$\downarrow$$
$$X$$

Вложение $Bl_Z X \hookrightarrow \mathbb{P}_Z E$ „виртуальное полное вложение" и можно воспользоваться квантовой теоремой Лефшеца, а при переходе от X к $\mathbb{P}(E)$ — квантовой теоремой Лерэ – Хирша.