07.12.19.

Л. Кацарков   Лекция 2 (12)

В прошлый раз

× Голоморфная выпуклость

M - hol convex. Теор. редукция Грауэрта-Реммерта

$M \to M^{ek}$ (стягивание компактных комплексных пм-зий) приводит к штейнову пм-зию

Теорема (EKPR) X - ~~компактное~~ гладкое пр-ое $\pi_1(X) \subset GL(n, \mathbb{C})$

$\Rightarrow \tilde{X}$ - голоморфно выпукло.

Идея док-ва Мы доказываем экв-ное условие: $\forall$ посл x_i без предельных точек то $\exists$ голом функция f на M, неогранич на $\{x_i\}$, $\Rightarrow$ Если существует ~~пол~~ цепочка кривых - бесконечная - то M не голом выпуклая. На самом деле, существование такой цепочки - единственное препятствие для г.в. в случае пов-ей. К случаю пов-ей все сводится хитрым применением ф-лы Лефшеца

на самом деле, такая цепочка в $\tilde{X}$ приходит из (очевидно, конечной) цепочки кривых в X, над каждой из которых накрытие тривиализуется.

Утверждается, что для линейной группы $\pi_1(X)$ такого не бывает.

<u>Ув</u> 2 $\pi_1(X)$ линейно, $C = \cup C_i \subset X$

Тогда $\forall i \ \mathrm{Im}(\pi_1(C_i) \to \pi_1(X)) = 1$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Im}(\pi_1(C) \to \pi_1(X)) = 1.$$

<u>Док-во ув 2</u>

Рассмотрим $\rho : \pi_1(X) \hookrightarrow GL(n, \mathbb{C})$

$\pi_1(X) \hookrightarrow \Pi_1^{\rho}(X)$ – конструкция из прошлого раза. На $\Pi_1^{\rho}(X)$ есть смешанная стр-ра Ходжа – конструкция из прошлой лекции

Тогда $\mathrm{Im}(\Pi_1^p(e_f^\circ) \to \Pi_2^p(x)) = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(\Pi_1^p(c) \to \Pi_1^p(x)) = 0$

т.к. категория смешанных стр

Ходже строгая $\square$

Можно попробовать построить

контр пример к гипотезе Шафаревича

(для нильпотентных фунд. групп)

Подход базируется на теории групп

Бернсайда.

Опр $B(n,d) = \left(F^n / \langle x^d = 1 \rangle^{\forall x \in F^n}\right)$

Например, $\vee$ $B(n,2) = \mathbb{Z}_2^n$.

$\vee$ $B(n,3)$ - тоже конечно - упр

$\vee$ $B(n,4)$ - тоже конечна, но это уже теорема

$\vee$ $|B(n,5)| \vee \infty$ - неизвестно

$\vee$ $|B(n,6)| < \infty$ - т. M. Hall

Вопрос (Бернсайд 1900) $\exists d > 0$:

$\forall n \geq 2$ $|B(n,d)| > \infty$

Th (Adjan, Novikov)

Для нечетного $n > 1458$

$|B(n,d)| > \infty$ $\forall n \geq 2$

Th (Громов, Альшанский)

Для любой гиперболической группы G

$B(G,d) = (G / \langle x^d = 1 \rangle)$ выполнено это свойство.

Th (Zelmanov) 1993

$B(n,d)$ не является ~~residually~~ res. finite

(G is Res finite если $\bigcap\limits_{\substack{N \\ \text{finite} \\ \text{index}}} N = \{1\}$)

Зам все линейные группы явл. Res finite.

Вопрос (Zelmanov) Существует ли $d \gg 0$ $n_1 > n_2$

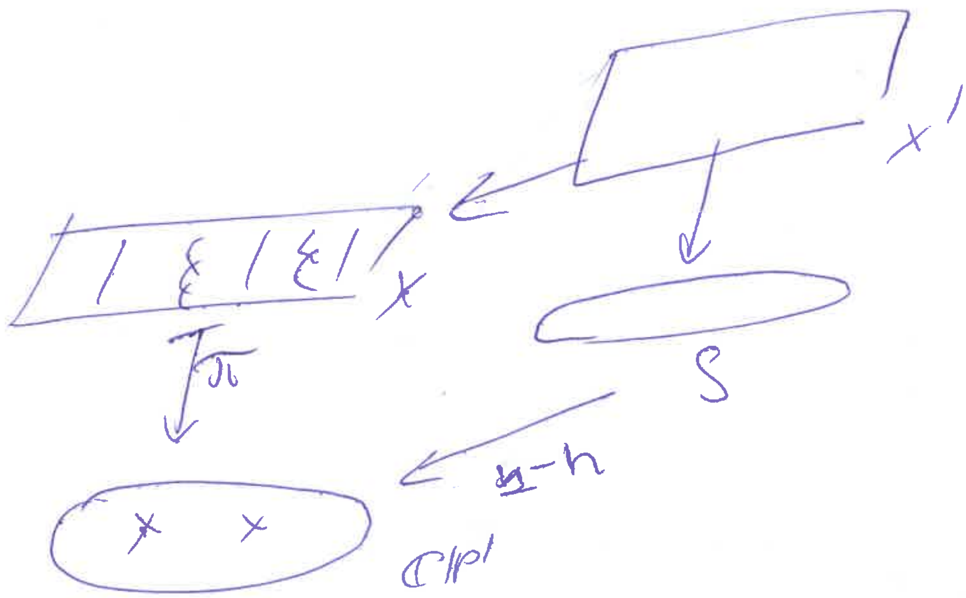
т. ч. $B(n_2, d)$ конечна, но

$B(n_1, d)$ бесконечна. $\square$

Есть контрпримеры к Зельманову для мелких простых d

Рассмотрим пов-ть X и обобщенный пучок Лефшеца $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^1$

Рассмотрим накрытие $X' \xrightarrow{n:1} X$ индуцированное накрытием $S \to \mathbb{CP}^1$ с точками ветвления в ~~обоих~~ ~~этих~~ критических зн-ях π



Тогда $\pi_1(X')$ ~~[illegible]~~ „больше" чем $\pi_1(X)$ | Действ: π_1 от „тотального" пр-ва расслоения Лефшеца это расширение π_1(базы) с помощью π_1(слоя), в соотношениями, пород. исчезающими циклами. Исч. циклы X' — накрытие б — исч. группы +

~~Или~~ Рассмотрим особый слой

$\partial C_i \subset X$. Тогда $\operatorname{Im} \pi_1(\partial C_i) \to \pi_1(X)$

это $\pi_1(C_i)/\langle P_i\rangle$, где P_i — исчезающие циклы.

Аналогично, $\operatorname{Im} \pi_1(C) \to \pi_1(X)$ совпадает с $\pi_1(C)/\langle P\rangle$

[Аналогия с вопросом Зельманова:

Может ли ~~быть~~ найти $g_1 > g_2$, так что

$\pi_1(\Sigma_{g_1})/\langle \gamma^{d}\rangle$ бесконечна,

$\pi_1(\Sigma_{g_2})/\langle \gamma^{d}\rangle$ конечна?]

Кеудзнов – Богомолов – строили группу поверхности с π_1, похожим на группы Бернсайда. Гипотеза Шафаревича может быть связана с версией вопроса Зельманова (т.е. г.Ш $\Rightarrow$ версию вопроса З. [положит. ответ не]).

~~Для гиперкэлеровой метрики~~

~~на X~~

Пусть $E \to X$ — комплексное расслоение, на нём определен поток Янга–Миллса–Хиггса на парах (кэлерова метрика + поле на E), двигающий (ω, ϕ) к стабильному расслоению Хиггса. Запустим поток $\mathbb{R}MX$, получим в пределе некоторую пару — метрику + поле Хиггса.

Поле Хиггса $\to$ $\rho : \pi_1(X) \to G$.

Рассмотрим

$$Sh^{\rho} = X \Big/ \left(\cancel{z \sim z' \text{ ... } \pi_1(z) \rightarrow G} \right) \quad z \,\Big|\, \rho|_{\pi_1(z)} \equiv 1$$

$\underline{\text{Тж}}$ Kollar, Prodi, Campana / Zuhier, Hrushovsky, ... логики

Sh^{ρ} — проективное мн-зие с особенностями не очень плохими

$\underline{\text{Kollar!}}$ $\boxed{\text{Shafarevich maps}}$

Исходное утверждение статьи EKPR доказано, что существует Sh^p является голоморфно выпуклым для линейной $h_2(X)$

[аргумент, который мы обсуждали раньше — про цепочку кривых — позволяет установить существование Sh^p]

Flow	Model Theory	Problem
KR	Minimal model problem	Nonrationality
YMH	Shafarevich variety ρ	Hol convexity
MCF HMS	Shafarevich variety	—,—

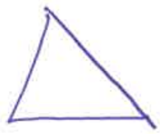
Статьи по направлению к
линейной гипотезе Ноф

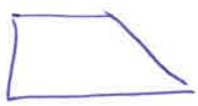
- нильпотентный случай
статья Кузнецова / 92

- редуктивный случай
Рамечендран - Кузнецов

По поводу связи Sh^P и теории моделей см учебник Зильбера и Хрушевского, например Миша Гаврилович.

Mirror symmetry.

$\mathbb{P}^2 \longrightarrow$ 

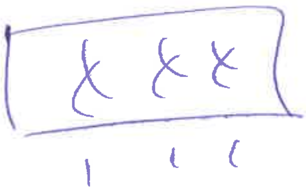
$\mathbb{P}^2_p \longrightarrow$ 

раздутие в одной точке

Поток кэлера-риччи ~~торич~~ на $\hat{\mathbb{P}}^2_p$ красиво деформирует многогранник этого торического мн-з-ия

см. например, обзор Дональдсона про K-R flow

У $\mathbb{P}^2$ есть зеркало - модель Ландау-Гинзбурга $(\mathbb{C}^\times)^2$ $W = x+y+\frac{1}{xy}$ с тремя особыми слоями



После раздутия $\hat{\mathbb{P}}^2_p$ имеет зеркало с одним дополнительным слоем

Упр

Поток KR выталкивает эту четвертую точку на бесконечность гомотетией

С точки зрения B-модели

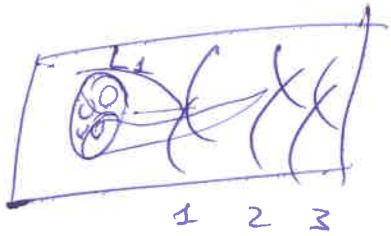
$D^b(\mathbb{P}^2) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle$

а с точки зрения A-модели

зеркала $FS((\mathbb{C}^*)^2, W = x + y + \frac{1}{xy})$

$$\parallel$$

$\langle L_1, L_2, L_3 \rangle$



После раздутия происходит добавление исключительного объекта

$\langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2), E \rangle = \langle L_1 \ldots L_4 \rangle$

и изучает различно не компактных

$H^2(\widetilde{\mathbb{P}}^2_p) = H^2(\mathbb{P}^2) \oplus \langle E \rangle$

С точки зрения Зеркеля это разложения на гиперкогомологии H1 ($\mathcal{F}$) конструктивного пучка исчезающих циклов).