Квантовый D-модуль: (Тут и X — гладкое проективное мн-ие / $\mathbb{C}$)

$p_1,\dots,p_n$ — базис в $H^2(X,\mathbb{Z})$

$\beta_1,\dots,\beta_n$ — двойственный базис в $H_2(X,\mathbb{Z})$

Малое кв. умножение:

$$(a*b,c) = \sum_{\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})} q_1^{\langle p_1,\beta\rangle}\dots q_n^{\langle p_n,\beta\rangle}\int_{\overline{M}_{0,3}(X,\beta)} ev_1^*(a)\cup ev_2^*(b)\cup ev_3^*(c)$$

(в случае, когда X Фано, данная сумма конечна)

$QH^*(X) = H^*(X,\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[q_1,\dots,q_n]$ — малые кв. когомологии.

Будем считать q_i функциями на $H^2(X,\mathbb{C})$: $q_i(\sum t_k p_k) = e^{t_i}$

$\nabla_a^\hbar = \hbar q_a \frac{\partial}{\partial q_a} + p_a *$ — компонента связности Гивенталя.

$D = \mathbb{C}[\hbar^{\pm 1}, q_1,\dots,q_n]\langle p_1,\dots,p_n\rangle$ — алгебра, заданная соотношениями

$[p_a,q_b] = \hbar\delta_{ab}q_b$, $[p_a,p_b]=[q_a,q_b]=0$.

$QDM = H^*(X,\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\hbar,\hbar^{-1},q_1,\dots,q_n]$ — D-модуль (н-ся малым квантовым D-модулем)

q_a действует умножением на q_a

p_a действует как $\hbar q_a \frac{\partial}{\partial q_a}$

$$S \in End\left(H^*(X,\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\hbar,\hbar^{-1},q_1,\dots,q_n]\right), \quad \nabla_a^\hbar\circ S = S\circ \hbar q_a\frac{\partial}{\partial q_a}$$
— фундаментальная матрица решений.

$$J = S^{-1}(1) = e^{p\log q/\hbar}\left(1+\sum_{\substack{\beta\neq 0\\ j=0..s}} q^{\langle p,\beta\rangle}\, T^j \int_{\overline{M}_{0,1}(X,\beta)} \frac{ev_1^*(T_j)}{\hbar-\psi_1}\right) \text{ —}$$

— J-функция Гивенталя (T_j — базис в $H^*(X,\mathbb{C})$, T^j — двойственный базис)

Утв: Предположим, что $H^*(X,\mathbb{C})$ порождается классами степени 2.

Тогда J порождает $SQDM(X)$ как D-модуль

Доказательство:

$$\varphi : D/I \to SQDM(X)$$

$$1 \mapsto J \quad , \quad I = \left(f \mid f(q, \hbar q\tfrac{\partial}{\partial q}, \hbar) J = 0 \right)$$

$$L^{-1} \circ \nabla^{\hbar} = \hbar d \circ L^{-1} \Rightarrow \varphi(f(q,p,\hbar)) =$$

$$= L^{-1}(f(q, \nabla^{\hbar}, \hbar) 1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ достаточно показать, что $f(q, \nabla^{\hbar}, \hbar)\cdot 1$ порождают весь $SQDM(X)$.

Рассмотрим $\alpha \in H^*(X,\mathbb{C})$

$\exists$ полином P : $\alpha = P(p_1, \dots, p_n)$

$$P(\nabla_1^{\hbar}, \dots, \nabla_n^{\hbar}) \cdot 1 = \alpha - \sum_{i=1}^{n} q_i h_i(\hbar) + (q_1, \dots, q_n)^2,$$

$$h_i(\hbar) \in H^*(X, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\hbar]$$

Выберем $P_i(x_1, \dots, x_n, \hbar)$ так, что $P_i(p_1, \dots, p_n, \hbar) = h_i(\hbar)$

$$\left[P(\nabla_1^{\hbar}, \dots \nabla_n^{\hbar}) + \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(\nabla^{\hbar}, \hbar) \right] \circ 1 = \alpha - \sum_{i,j} q_i q_j h_{ij}(\hbar) + (q_1, \dots, q_n)^3$$

...

$\square$

Следствие: Рассмотрим $\tilde{D} = \mathbb{C}[\hbar, q_1, \dots, q_n]\langle p_1, \dots, p_r \rangle \subset D$,

$$\tilde{I} = I \cap \tilde{D} \subset \tilde{D}$$

Тогда $SQH^*(X) \cong \lim_{\hbar \to 0} \tilde{D}/\tilde{I}$

Полные флаги:

G – п/п группа $/\mathbb{C}$

$B < G$ – борелевская подгруппа.

$X = G/B$ – полные флаги.

$T < B$ – максимальный тор.

Φ – система корней, $\Delta < \Phi^+$ – простые корни.

$\Theta < \Delta \rightsquigarrow P_\Theta = \langle B, U_{-\alpha}\ (\alpha \in \Theta) \rangle$ – параболическая подгруппа соответствующая Θ.

$\Delta = \{\alpha_i\}$; $\{\omega_i\}$ – фундаментальные веса.

Описание $H^*(X, \mathbb{Z})$ (Борель):

Есть изоморфизм $\langle \omega_i \rangle \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Z})$

Он устроен следующим образом: $\chi \in \langle \omega_i \rangle \longmapsto$ характер $\xi_\chi \in \mathrm{Hom}(T, \mathbb{C}^*)$

$\xi_\chi(\exp(t)) = \exp(\chi(t)) \longmapsto \xi_\chi \in \mathrm{Hom}(B, \mathbb{C}^*)$ (продолжаем единицей на унипотентный радикал)

$\longmapsto$ линейное расслоение $L_\chi = G \times \mathbb{C} / \sim$, $(g, a) \sim (gb, \xi_\chi(b) a)$

$$\begin{array}{c} L_\chi \\ \downarrow \\ X \end{array}$$

$\longmapsto c_1(L_\chi) \in H^2(X, \mathbb{Z})$.

Индуцированный гомоморфизм $\mathrm{Sym}^\bullet(\langle \omega_i \rangle) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{Z})$ сюръективен, его ядро порождено Вейль-инвариантными элементами.

По двойственности $H_2(X, \mathbb{Z}) \cong \langle \alpha_i \rangle$.

Рациональные кривые на X:

Утв: морфизм $X \to X_{\alpha_i} \equiv G/P_{\alpha_i}$ индуцирует следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} H^2(X,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\simeq"] & \langle \omega_i \rangle \\ H^2(X_{\alpha_i},\mathbb{Z}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\simeq"] & \langle \omega_i \rangle_{i \in \Delta \setminus \{\alpha_i\}} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Доказательство:

Рассмотрим комм. диагр.:

$$\begin{tikzcd} SL_{\alpha_i} \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Видим: $\left(i^* c_1(L_{\omega_k}), [\mathbb{P}^1]\right) =$

$= \delta_{ik}$ (фундаментальный вес SL_{α_i}, положительный корень SL_{α_i}) $=$

$= \delta_{ik}$ $\Rightarrow \begin{cases} i - \text{вложение} \\ i_*[\mathbb{P}^1] = \alpha_i \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\begin{matrix} X \\ \downarrow \\ X_{\alpha_i} \end{matrix}$ $-$ $\mathbb{P}^1$-расслоение, класс слоя $= \alpha_i$.

$\square$

Следствие: $f: \mathbb{P}^1 \to X \mid f[\mathbb{P}^1] = \alpha_i \Rightarrow f(\mathbb{P}^1)$ является слоем морфизма $X \to X_{\alpha_i}$

Следствие: $K_X = -2 \sum_{i \in \Delta} c_1(L_{\omega_i})$ (X - Фано, как и все G/P_Θ, как показывает тоже самое рассуждение).

Доказательство:

$\begin{matrix} X \\ \downarrow f_i \\ X_{\alpha_i} \end{matrix} \rightsquigarrow 0 \to f_i^* \Omega^1_{X_{\alpha_i}} \to \Omega^1_X \to \Omega^1_{X/X_{\alpha_i}} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow K_X = f^* K_{X_{\alpha_i}} \otimes \Omega^1_{X/X_{\alpha_i}}$

$$(K_X, \alpha_i) = (f_i^* K_{X_{\alpha_i}}, \alpha_i) + (\Omega^1_{X/X_{\alpha_i}}, \alpha_i) = 0 - 2 = -2$$

$\square$

Описание $SQH^*(X)$ (Ким и Гивенталь):

Лемма 1: Пусть $Q = \sum'_{1 \le i,j \le n} Q_{ij} p_i p_j$ – соотношение в $H^*(X, \mathbb{C})$.

(Тут $c_1(L_{\omega_i})$ обозначен за p_i)

Тогда в $SQH^*(X)$ выполнено соотношение

$$\sum_{i,j}{}' Q_{ij}\, p_i * p_j = \sum_{k,i,j}{}' Q_{ij}\, p_i(\beta_k)\, p_j(\beta_k)\, q_k.$$

($\alpha_k \in H_2(X, \mathbb{Z})$ обозначен за β_k)

Доказательство:

Из соображений размерности $\sum'_{i,j} Q_{ij}\, p_i * p_j =$

$$= \sum_{k,i,j}{}' Q_{ij}\, q_k \langle p_i, p_j, pt \rangle_{0,3,\beta_k} \overset{\text{(аксиома дивизора)}}{=} \sum_{i,j,k}{}' Q_{ij}\, p_i(\beta_k) p_j(\beta_k)\, q_k \langle pt \rangle_{0,1,\beta_k}$$

(описание $\overline{M}_{0,1}(X, \beta_k)$)

$$= \sum_{i,j,k}{}' Q_{ij}\, p_i(\beta_k)\, p_j(\beta_k)\, q_k = \sum_k{}' Q_{kk}\, q_k$$

$\square$

Следствие: Дифф. оператор $H = Q\left(\hbar q \frac{\partial}{\partial q}\right) - \sum'_k Q(\beta_k) q_k$ зануляет J.

~~Заметим, что для ... можем взять в качестве Q след.~~

Заметим, что выражение $\sum\limits'_{1\le i,j\le n}(\alpha_i,\alpha_j)\omega_i\omega_j$ W-инвариантно => мы можем взять

$$Q=\sum_{i,j}{}'(\alpha_i,\alpha_j)p_ip_j.$$

Соответствующий H является гамильтонианом квантовой Тоды для $G^\vee$ ($G^\vee$ - двойственная по Ленглендсу к G)

Следующая лемма сводит вычисление $SQDM(X)$ к вычислению интегралов движения для H.

Лемма 2: Формальный ряд

$$A=e^{\frac{p\log q}{\hbar}}\sum_{\substack{\beta\ge 0\\ \beta\in H_2(X,\mathbb{Z})}}{}' P_\beta\, q^{\langle p,\beta\rangle},$$

~~который~~ для которого выполнено $HA=0$, однозначно определяется по P_0. (Тут $P_\beta\in H^*(X,\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[[\hbar^{-1}]]$)

Доказательство:

$$HA=0 \Rightarrow Q(p+\hbar\langle p,\beta\rangle)P_\beta=\sum_k{}' Q(\beta_k)P_{\beta-\beta_k}$$

□

Следствие: Пусть $D(\hbar q\frac{\partial}{\partial q}, q, \hbar)$ - полиномиальный дифф. операт[ор] такой что $[D,H]=0$, и $D(p,0,0)=0$ в $H^*(X,\mathbb{C})$. Тогда $DJ=0$.

Доказательство:

Положим $A=DJ$, $HA=HDJ=DHJ=0$.

$D(p,0,0)J=0$ => Разложение A начинается с $P_0=0$

□.

Интегралы движения для SL_{n+1} можно выписать следующим образом: (общий случай можно найти в статье Кима)

Рассмотрим веса $\varepsilon_i : T \to \mathbb{C}^*$, $i \in \overline{0,\dots n}$

$$\mathrm{diag}(t_0 \dots t_n) \mapsto t_i$$

$\varepsilon_i \rightsquigarrow x_i = c_1(L_{\varepsilon_i}) \in H^2(X,\mathbb{C})$ - соответствующий класс в когомологиях.

$W = S_{n+1}$ действует перестановками на ε_i =>

$$\Rightarrow \quad H^*(X,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[x_0,\dots,x_n] \big/ (\text{симметрические полиномы от } x_i)$$

$$x = \sum \xi_i x_i$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = p_1^2 + (p_2-p_1)^2 + (p_3-p_2)^2 + \dots + (p_n-p_{n-1})^2 + p_n^2 \; -$$

– W-инвариант.

соответствующий гамильтониан $H = \frac{1}{2}\hbar^2 \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} - \sum_{k=1}^{n} q_k$

Рассмотрим матрицу
$$A = \begin{pmatrix} \hbar\frac{\partial}{\partial \xi_0} & q_1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & q_n \\ 0 & & -1 & \hbar\frac{\partial}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}$$

$$\chi(\lambda) = \det(A+\lambda I) = \lambda^{n+1} + D_1\lambda^n + \dots + D_{n+1}$$

Несложно видеть:

(1) $H = \frac{1}{2}D_1^2 - D_2$

(2) $\forall i \quad D_i(x,0,0)$ - симметрический полином.

(3) $[D_i, D_j] = 0$

(для доказательства (3) можно посмотреть на коэфф. полинома $0 = [\chi(\lambda_1), \chi(\lambda_2)]$.)

Следовательно, $$SQH^*(X) \cong \frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]}{(D_1(x,q,0), \dots, D_{n+1}(x,q,0))}$$

(Тут q_i, как и раньше, „сопряжены" фундаментальным весам p_i)