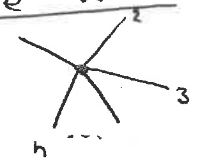
Бирациональные инварианты из симплектической геометрии

17.10.19 Лекция №4

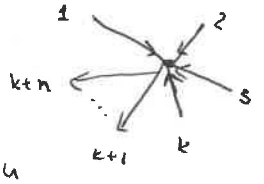
Леве Сухенов

Фробениусовы мн-зия и квантовые когомологии

① Уравнение WDVV

Обозначения • Веник  - n-тензор $\in V^{\otimes n}$

•

• Веник со стрелочками  $\in V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes n}$

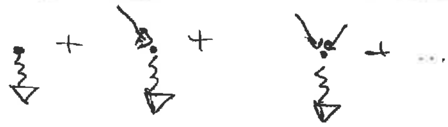
тензор с верхними и нижними индексами

В присутствии метрики на V стрелочки можно обращать

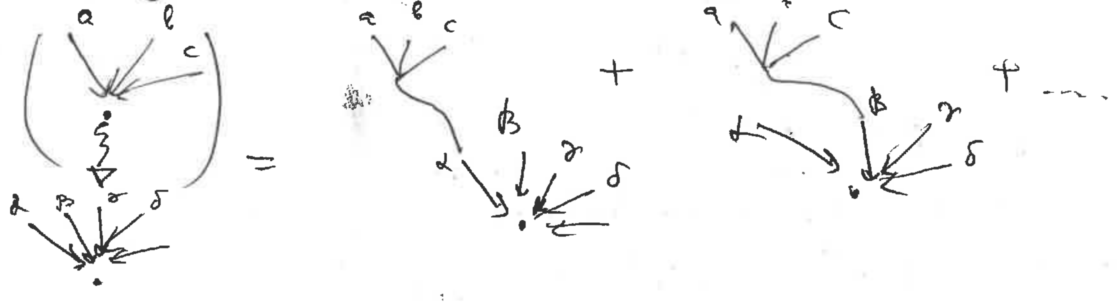
• Веники можно склеивать (свертка) и дизъюнктно объединять - тензорное пр-ие.

• Функция на пр-ве V (точнее, форм. ряд) изображается как следующая сумма

• Векторное поле изображается как

 $= \sum_{k,j,i_1\dots i_k} a^{j}_{i_1\dots i_k} x^{i_1}\dots x^{i_k} \partial/\partial x_j$

• Графическое изображение пр-ой функции вдоль векторного поля по линейности



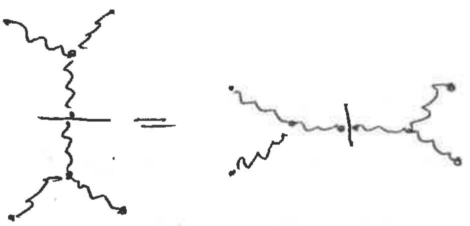
· 1-форма имеет стрелочку $\uparrow$ вверх,

k-форма имеет много волнистых стрелочек наверх

дифференциал де Рама меняет прямую стрелочку на волнистую

Зам Если не оговорено обратное, прямые хвостики симметричны, косые антисимметричны

Опр Ур-ие ассоциативности для формальной функции Φ это следующее условие на симметрический 3-тензор $A(\partial_x, \partial_y, \partial_z) := \partial_x \partial_y \partial_z \Phi$



Мы предполагаем, что $\Phi: V \to \mathbb{R}$ задана на мн-зии с метрикой g, так что стрелки ставить не обязательно

Так как Φ формальная функция, логично задавать

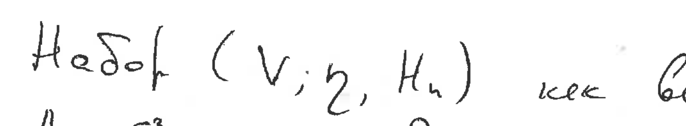
· V - векторное пр-во над полем k: $\mathrm{char}\, k = 0$,

· $H_n: V^{\otimes n} \to \mathbb{R}$ - набор тензоров для $n \geq 0$, $\Phi(v) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} H_n(v, \dots, v)$

· метрика g задана скалярным пр-нием η на V. □

Опр Набор $(V; \eta, H_n)$ как выше, для которого $A \in S^3(V^*)$ удовл. уравнению ассоциативности, называется формальным фробениусовым мн-зием. □

Замечание Условие ассоциативности на A переписывается как ур-ие WDVV на потенциал Φ



Явно это переписывается следующим образом: $\forall i, j, k, l$

$$\sum_{s,r} \partial_i \partial_j \partial_s \Phi \, \eta^{sr} \partial_r \partial_k \partial_l W = \sum_{s,r} \partial_i \partial_k \partial_s \Phi \, \eta^{sr} \partial_r \partial_j \partial_l W$$

② Фробениусовы многообразия

<u>Опр</u> Фробениусово мн-зие это тройка (M, g, A) такая, что

- M - многообразие (опр. имеет смысл в любой категории - ~~дифференц-ой~~, аналитической или алгебраической).
- g - риманова метрика на M
- A - симметрический 3-тензор на M

удовлетворяющая условиям:

- g плоская, т.е. для св-ти Леви-Чивиты $\nabla_g^{LC} =: \nabla$

$$\nabla^2 \equiv 0$$

- $\forall p \in M$ $\exists$ открытая окр-ть $U \ni p$ такая, что

$(U, g|_U, A|_U)$ - формальное фроб. мн-зие,

т.е. A удовлетворяет условию ассоциативности и (локально) условию потенциальности $\square$.

<u>Замечание</u> Определение имеет смысл и для супермногообразия. Это существенное обобщение, т.к. пр-ва модулей обладают $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ градуированными касательными пр-вами.

<u>Геометрический смысл уравнения WDVV.</u>

Рассмотрим мн-зие (M, g) и связность ∇ в касат. расслоении TM [тут g - произвольная метрика, не обязательно плоская]. Тензор $A \in \Gamma(M, (T^*M)^{\otimes 3})$ задаёт деформацию ∇:

- зададим умножение $\circ : TM \otimes TM \to TM$ по формуле $\forall v, w, u \in \mathcal{X}(M)$ $\quad g(v \circ w, u) = A(v, w, u)$.
- зададим семейство связностей на TM по ф-ле $\forall v, w \in \mathcal{X}(M)$
$\nabla_v^\lambda w := \nabla_v w + \lambda v \circ w \quad - 3 -$

Утв. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) • Тензор $A \in \Gamma(M, (T^*M)^{\otimes 3})$ инв-ен относительно цикл. перестановки

• $\forall \lambda$ D^λ — плоская и без кручения.

• D^λ уважает спаривание $(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{X}(M)\otimes \mathbb{C}[[\lambda]] = \mathcal{E}$

$$(\cdot,\cdot): \mathcal{E}\otimes\mathcal{E} \to \mathcal{O}(M)\otimes\mathbb{C}[[\lambda]] \qquad (v,w) := \rho(v(-\lambda), w(\lambda))$$

т.е. $\forall v,w\in\mathcal{E}$, $\varphi \in \mathcal{X}(M)$ выполнено

$$\mathcal{L}_\varphi (v,w) = (D^\lambda_\varphi v, w) + (v, D^\lambda_\varphi w);$$

(2) (M, ρ, A) — ~~интегрируемые~~ фробениусово мн-зие

Это утв устанавливает связь теории фроб. мн-зий и интегрируемых систем

Идея док-ва: ✓ Заметим, что D^λ уважает $(\cdot,\cdot)$ (см лекцию №5) тогда и только тогда, когда ∇ сохраняет ρ. С другой стороны $D = D^0$ не имеет кручения $\Rightarrow D = D^{LC}_\rho$. Т.к. D еще и плоская, то ρ — плоская метрика.

✓ Запишем $D^\lambda = D + \lambda \Gamma_{ij}^k$, где $(\Gamma_{ij}^k) \in \Omega^1(\mathrm{End}\, TX)$ — матрица, определяющая умножение $\circ$ в плоских координатах для метрики ρ. Другими словами

$\{e_i\} \in \mathcal{X}(M)$ — базис плоских векторных полей $De_i = 0$

$$\Gamma_{ij}^k \text{ задано рав-вом } e_i \circ e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k$$

✓ Условие отсутствия кручения у св-ти D^λ эквивалентно симметричности Γ_{ij}^k по i и j (стандартное вычисление в терминах символов Кристоффеля) $\Rightarrow$

A — симметрический тензор (цикл инв-ть + симметрия по первым 2-м аргументам)

✓ D_λ плоская эквивалентно равенству

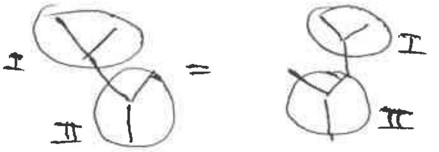
$$\forall\lambda \quad \lambda(\partial_s \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{sj}) + \lambda^2(\Gamma_{ij}^s\Gamma^l_{sk} - \Gamma^l_{is}\Gamma^s_{jk}) = 0$$

Тогда равенство нулю первого слагаемого эквивалентно потенциальности, равенство нулю второго слагаемого эквивалентно ассоциативности □

Опр Семейство ∇^λ называется структурной связностью фроб. многообразия

Напоминание: коммутативной фробениусовой алгеброй называется тройка (V, η, A), где
- V – векторное пр-во
- η – скалярное пр-е
- A – симметрический 3-тензор

$A = Y$ такой, что выполнено



□

Замечание (M, ρ, A) – фробениусово мн-зие $\Rightarrow$

$\forall p \in M$ на T_pM задана стр-ра фробениусовой алгебры со структурными константами $\Gamma_{ij}^{k}(p) := \sum_k \Gamma_{ij\ell}\,\rho^{\ell k}(p)$ для базиса e_i, заданного с помощью отождествления всех T_pM $\forall p$ плоскими векторными полями.

Т.о. фробениусово многообразие можно рассматривать как деформацию структуры фробениусовой алгебры в касательном пр-ве T_pM. □

Опр Единицей на фробениусовом мн-зии (M, ρ, A) наз-ся векторное поле $e \in \mathcal{X}(M)$ со свойствами

$$\begin{cases} \nabla e \equiv 0 \\ \forall v \in \mathcal{X}(M) \quad e \circ v \equiv v \end{cases}$$

В таком случае, M задаёт базу семейства умножений $\circ_p$ на $V \cong T_pM$, таких, что $(V, (\cdot,\cdot)_p, \mathbb{1}, \circ_p)$ – фробениусова алгебра с единицей □

② Фробениусовы многообразия

Опр (M, ρ, A) — фробениусово мн-зие это:

- многообразие M
- риманова метрика ρ на M, являющаяся плоской $(\nabla^{LC}_\rho)^2 \equiv 0$;
- симметрический 3-тензор A на M

такие, что $\underbrace{\forall p \in M}_{\exists U \text{ эр-окр-ть}}$ $(T_pM, \rho|_U, A|_U)$ — формальное фробениусово мн-зие

т.е. A удовлетворяет условию ассоциативности и (локально) условию потенциальности. □

$\boxed{\text{Замечание!}}$ • Это определение имеет смысл в любой категории - дифференцируемой, аналитической либо алгебраической над полем характеристики ноль.

• Определение имеет смысл для супермногообразий ($\mathbb{Z}_2$-градуированных). Это существенно, так как пр-ва модулей часто являются супермн-сями, но мы опускаем соответствующие опр-ия для простоты. □

Геометрический смысл уравнения WDVV

Рассмотрим тройку (M, ρ, A), где ρ - метрика, $A \in \Gamma((T^*M)^{\otimes 3})$ без дополнительных условий. Определим умножение

$\circ : TM \times TM \to TM$, заданное формулой

$\forall v,w,u$ $\rho(v \circ w, u) := A(v,w,u)$

Π

$X(U)$ Пусть ∇ - связность на TM, и ∇^λ - ее деформация

$$\nabla^\lambda_\varphi X := \nabla_\varphi X + \lambda X \circ \varphi$$

③ Квантовые когомологии

Пусть X - проективное многообразие Фано.

Сейчас мы приведем конструкцию формального фробениусова многообразия $QH^\cdot(X)$ - квантовых когомологий X

$$\boxed{QH^\cdot(X) = \left(H^{2*}(X,R),\ \eta^P,\ \partial_{\gamma_x}\partial_{\gamma_y}\partial_{\gamma_z}\Phi^{GW}\right)}$$

$QH^\cdot(X)$ - формальное фробениусово многообразие над полем, полученным пополнением поля частных от кольца

$$\hat{R} = \{\, q^\beta \mid \beta \in H_2(X,\mathbb{C})\} \text{ - полугруппового кольца вторых гомологий.}$$

Фиксируя базис $T_1^\vee,\dots,T_p^\vee$ в $H_2(X,\mathbb{C})$, получаем отождествление

$$R = \mathbb{C}[[T_1^\vee,\dots,T_p^\vee]].$$

Рассмотрим пр-во $V = H^{2*}(X,R)$ над R со скалярным произведением η^P, заданным $\eta^P(\alpha,\beta) := \int_X \alpha\wedge\beta$

Напомним, что подсчет рациональных кривых в заданном классе $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$ с n отмеченными точками, при лежащими на циклах, представляющих классы $PD(\alpha_1),\dots,PD(\alpha_n)$, $\alpha_i \in H^\cdot(X,\mathbb{Z})$ определяют инварианты Громова - Виттена

$$GW_{n,\beta} = \langle\dots\rangle_{n,\beta} : (H^\cdot(X,\mathbb{Z}))^{\otimes n} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\langle\alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n,\beta}(X)]^{vir}} ev^*(\otimes\alpha_i)$$

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{M}}_{0,n,\beta}(X) \arrow[r, "ev"] \arrow[d] & X^n \\ \overline{\mathcal{M}}_{0,n} & \end{tikzcd}$$

Определим $GW_n := \sum_{\beta\in H_2(X,\mathbb{Z})} GW_{n,\beta}\, q^\beta \in (H^\cdot(X,\mathbb{Z}))^{\otimes n} \otimes R$

(сумма конечна, так как X - Фано - подробнее см. в лекции 5).

По линейности, получаем набор операций

$$GW_n : V^{\otimes n} \to R$$

<u>Утв</u> [Концевич-Манин] стандартная конструкция $[M_{0,n,\beta}(X)]^{vir}$ приводит к инвариантам Громова-Виттена GW_n, таким, что потенциал $\Phi^{GW}(v) := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} GW_n(v,\dots,v) \in R$ удовлетворяет уравнению WDVV. □

Док-во использует соотношение Киля в когомологиях пр-ва $M_{0,n}$ и обобщает идею Концевича вычисления кол-ва рациональных кривых на $\mathbb{CP}^2$, приведенное в лекции №2. Мы сформулируем теорему К-М в большей общности в следующей лекции. □

<u>Опр</u> Тройка $(H^0(X,R), \eta^P, \partial_x \partial_y \partial_z \Phi^{GW})$ определяет структуру формального фробениусова мн-зия, которое наз-ся квантовыми когомологиями мн-зия X □

Единица в $QH^*(X)$ задана векторным полем $e = \mathbb{1} \in H^0(X,R)$

<u>Замечание</u> конструкцию QH можно обобщить на все когомологии и на случай произвольного компактного симплектического многообразия, но для простоты мы не формулируем соответствующие утв-ия в большей общности. □

<u>Опр</u> Ограничивая структурные константы C_{ij}^k умножения $\circ$ в касательное пространство $T_0 V$, мы получаем стр-ру фробениусовой алгебры на V, заданное для $v,w,u \in H^2(X,R)$ равенством

$$\int_X v \wedge w \wedge u = \sum_{\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})} GW_{3,\beta}(v,w,u)\, q^\beta.$$

Эта фробениусова алгебра называется кольцом малых квантовых когомологий.

(4) Эйлерово векторное поле и расширенная структурная связность

<u>Напоминание</u> Ожидаемая размерность пр-ва модулей $\mathcal{M}_{0,n,\beta}(X)$ равна $\dim_{\mathbb{C}} X - 3 + \langle \beta, c_1(X)\rangle = \mathrm{vdim}$ и конструкция Концевича–Манина выдает виртуальные фундаментальные классы $[\overline{\mathcal{M}}_{0,n,\beta}(X)] \in H_{\mathrm{vdim}}(\overline{\mathcal{M}}_{0,n,\beta}(X); \mathbb{Q})$

Таким образом $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_\beta = 0$ как только

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \neq \dim_{\mathbb{C}} X - 3 + \langle \beta, c_1(X) \rangle.$$

<u>Замечание</u> Рассмотрим постоянное сечение $\Gamma(TV)$ касательного расслоения $V = H^{2*}(X, \mathbb{R})$, заданное

$\overline{v} := c_1(X)$

Выберем базис $\langle T_0, T_1, \dots, T_m \rangle = H^{2*}(X, \mathbb{R})$ из однородных элементов и определим поле E на V равенством

$$E = \overline{v} + \sum_{i=0}^{m} \left(1 - \tfrac{1}{2} \deg T_i\right) y_i \, \partial/\partial y_i$$

где вектор в V раскладывается как $v = \sum_{i=0}^{m} T_i y_i$

Тогда Φ^{GW} однородно относительно $\mathcal{L}_E$:

$$\mathcal{L}_E \Phi^{GW} = (\dim_{\mathbb{C}} X - 2)\, \Phi^{GW},$$

что обобщает предыдущее замечание о $\mathrm{vdim}\, \overline{\mathcal{M}}_{0,n,\beta}$.
Это следствие тождеств $\mathcal{L}_E(g) = (\dim_{\mathbb{C}} X - 3)(g)$ и $\mathcal{L}_E(\circ) = \circ$, которые, в свою очередь, следуют из аксиомы дивизора в теории Громова–Виттена $\square$.

<u>Опр</u> Векторное поле E на (формальном) фробениусовом многообразии (M, p, A) называется <u>Эйлеровым</u>, если $\begin{cases} \exists D \in \mathbb{C} : \mathcal{L}_E(g) = Dg \\ \exists d_0 \in \mathbb{C}^* : \mathcal{L}_E(\circ) = d_0(\circ) \end{cases}$ □

Т.о. на $QH^\circ(X)$ существует каноническое Эйлерово векторное поле с коэффициентами $(D, d_0) = (\dim_{\mathbb{C}} X - 3, 1)$.

<u>Замечание</u> Действие E отождествляет связности ∇_λ для разных λ. Действительно, E конформно (растягивает метрику) $\Rightarrow$ сохраняет $\nabla = \nabla^{LC}_p = \nabla^0$ и E растягивает $(\circ)$, а значит и коэффициенты Γ_{ij}^k. □

Теперь мы можем обобщить утверждение на стр 4.

<u>Ув</u> Рассмотрим риманово мн-зие (M, p), связность ∇ в TM, тензор A и векторное поле $E \in \mathcal{X}(M) = \Gamma(M, TM)$.

Рассмотрим $\widehat{M} := M \times \mathbb{CP}^1_\lambda$ и расслоение $\widehat{T} := \pi^* TM \to \widehat{M}$, $\widehat{M} \xrightarrow{\pi} M$.

$\mathcal{X}(\widehat{M})$ порождено поднятиями $\widetilde{Y}$ полей $Y \in \mathcal{X}(M)$, зануляющими λ, и полем $\partial/\partial\lambda$. $\Gamma(\widehat{T})$ порождено поднятиями $\widehat{Y}$ полей $Y \in \mathcal{X}(M)$. Зададим оператор Gr_E на полях $\mathcal{X}(M)$ заданный коммутатором $[E, -]$ на плоских полях и продолженный на все $\mathcal{X}(M)$ по линейности.

Рассмотрим связность $\widehat{\nabla}$ на $\widehat{T}$, заданную

$$\begin{cases} \widehat{\nabla}_X \widehat{Y} = \widehat{(\nabla^\lambda_X Y)} \\ d_0 \widehat{\nabla}_{\lambda \partial/\partial\lambda} \widehat{Y} = \widehat{(\lambda \partial_\lambda Y - \lambda E \circ Y + Gr_E(Y))} \end{cases}$$

В случае полупростого формального фр. мн-зия преобразование Лапласа $\widehat{\nabla}$ определяет плоскую св-ть на $M \times \mathbb{CP}^1$ с регул. особенностями

Тогда
- A $\widetilde{\lambda}$ циклически инвариантен
- ∇ — не имеет кручения
- $\widehat{\nabla}$ плоская св-ть с особ вдоль $M \times \{0, \infty\}$
- $\widehat{\nabla}$ сохраняет спаривание на $\Gamma(\widehat{T})$: $(v, w) = \frac{1}{\lambda}(v(-\lambda), w(\lambda))$

$\Leftrightarrow$ (M, p, A, E) — фробениусово мн-зие с Эйлеровым в. полем □