Связности с регулярными особенностями.

Пусть L - расслоение над пов-тью S. Связность (алгебраическая / голоморфная) это линейный дифференциальный оператор $\nabla : L \to L \otimes \Omega^1$ с символом d.

В локальных координатах он имеет вид $\nabla = d + A(z)\,dz$. Выражение $A(z)dz$ — форма связности, $A \in \mathrm{End}(L)$.

<u>Замечание</u> любая связность с мероморфными к-тами на алг. пов-ти автоматически алгебраична.

<u>Следствие</u> (алгебраизация Биркгофа)

Определим категорию локальных данных $C_{loc}^{(p)}$ как ростки мероморфных связностей в точке p (с точностью до интересующих нас калибровочных преобразований) с помеченным плоским базисом вдоль фиксированного луча из точки p.

Тогда категория связностей на компактной пов-ти S может быть описана как плоские св-ти на $S \setminus p_1 .. p_n$ с отождествлениями с объектами $C_{loc}(p_i)$.

<u>Пример</u>. Связность называется имеющей регулярные особенности если её сечения растут не быстрее $|z|^{-n}$.

Категория плоских св-тей с рег. особенностями с точностью до <u>мероморфных</u> калибровочных преобразований это в точности категория лок. систем.

<u>А до голоморфных</u>? надо провести локальную классификацию.

Теорема (Гельфанд- МакФерсон -Вилонен)

Росток регулярной связности задаётся следующими данными линейной алгебры: пара пространств $\Phi \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \Psi$, т.ч. $T = 1_\Psi - vu$ обратим.

где Ψ - слой над общей точкой, а Φ - так называемые „исчезающие циклы": $\mathbb{H}^1_K(\mathcal{F})_0$, где $\mathcal{F}$ - комплекс $L \xrightarrow{\nabla} L \otimes \Omega^1$, K - исходящий из точки 0 луч.

② Отображения u и v определяются так:

$v: \Psi \to \Phi$ — аналитическое продолжение против часовой стрелки

(напомним, что $\underline{H}^0_K(\mathcal{F}) \to \underline{H}^0(\mathcal{F}) \to \underline{H}^0(\mathcal{F}, S\setminus K) \to \underline{H}^1_K(\mathcal{F}) \to \underline{H}^1(\mathcal{F})$)

$u: \Phi \to \Psi$ — генерализация (заметим, что $\Psi \simeq \underline{H}^1_K(\mathcal{F})_b$, $b \neq 0 \in K$).

Замечание: на самом деле, такие данные не всегда задают связность с рег. особенностями, например для $\Psi = 0$. обобщением этого понятия является голономный ∂-модуль, т.е. комплекс вида $\mathbb{C}[x,\partial_x] \xrightarrow{D} \overset{\text{рег.}}{\mathbb{C}[x,\partial_x]}$. Наш комплекс получается при помощи функтора Sol: $\_ \otimes \mathcal{O}$.

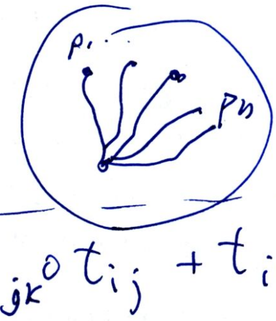
Замечание: таким образом, категория гол. ∂-модулей на ~~[illegible]~~ диске с рег. особенностями в $p_1..p_n$ это категория диаграмм вида

$$\Psi \;\; \begin{matrix} \overset{v_1}{\underset{u_1}{\rightleftarrows}} \Phi_1 \\ \vdots \\ \overset{v_n}{\underset{u_n}{\rightleftarrows}} \Phi_n \end{matrix}$$

т.ч. $1 - u_i v_i = t_i$ — монодромии обратимы.

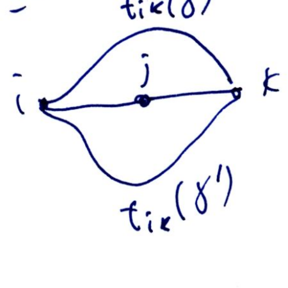
Теорема: (Гельфанд-Макферсон-Вилонен) определим отображения $t_{ij}: \Phi_i \to \Phi_j$ как $v_j u_i$. Тогда ~~[illegible]~~ локализация категории гол. ∂-модулей по постоянным ∂-модулям это категория наборов $\Phi_1, \dots \Phi_n$ и отображений t_{ij} (с единств. условием что $1 - t_{ii} = t_i$ обратимы).

Замечание: отождествление зависит от выбора разрезов:



таким образом, на этом наборе данных обязана естественно действовать группа кос.

Формула:



$$t_{ik}(\gamma) - t_{jk} \circ t_{ij} + t_{ik}(\gamma') = 0$$

(линейно-алгебраическое описание этого действия).

③ Теперь изучим преобразование Фурье-Лапласа. Это — чисто алгебраическая операция:

пусть дан $\mathbb{C}[x, \partial_x] \xrightarrow{D} \mathbb{C}[x, \partial_x]$ $\mathcal{D}$-модуль.

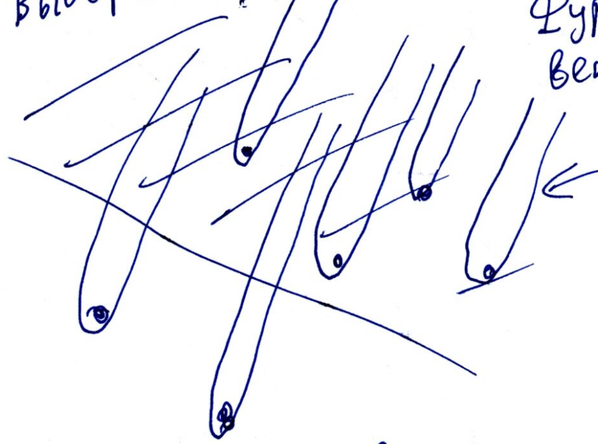
тогда замена $x \to \partial_x$, $\partial_x \to -x$ ~~в~~ операторе D (т.е. подкрутка на такой внешний автоморфизм) называется его преобразованием Фурье (обозначается $\mathcal{F}$).

Если у исходного модуля M были регулярные особенности, то $\mathcal{F}(M)$ имеет рег. особенность в 0 и иррегулярную в бесконечности. На самом деле, локальные данные особенности в ∞ — как раз данные $\{t_{ij}\}$, а рег. особенность в 0 помнит глобальные сечения:

- -

Сектора Стокса.

Выберем полуплоскость, соотв. волновым векторам в преобразовании Фурье. Тогда для волнового вектора в такой полуплоскости



интегралы Фурье по таким контурам реализуют базис ~~асимптотических~~ в пр-ве решений фурье-двойственного $\mathcal{D}$-модуля.

Мотивировавшись этим, можно дать абстрактное определение.

Определение экспоненциальная структура Стокса это:

- набор локальных систем $\Phi_1, \ldots \Phi_n$ на S^1, соответствующих точкам $p_1 \ldots p_n$
- локальная система Φ на S^1, фильтрованная пучком частично-упорядоченных множеств $\{p_1, \ldots p_n\}$ с фильтрацией „высота в направлении $\alpha \in S^1$".
- присоединённые факторы изоморфны Φ_i

4. (не экспоненциальная) структура Стокса

Это то же самое, только фильтрация произведена более хитрым пучком частично-упорядоченных множеств, а именно: дан набор (потенциально многозначных) 1-форм $f(z)dz$, $f(z)$ — выражение вида $\cancel{a(z)e^{b(z)}}$,

$$\sum_{\substack{a\in\mathbb{Q}\\ a<-1}} c_a z^a$$

~~где a, b — полиномы Лорана.~~

Фильтрация берётся по асимптотике стремления к ∞ вдоль луча $\alpha\cdot r$, $\alpha\in S^1$, $r>0$, $\to 0$.

<u>Теорема</u> (Делинь, Турриттин, Хукухара, Мальгранж)

~~Ростки иррегулярных~~ Ростки иррегулярных связностей / мером. калибровочных преобразований классифицируются структурами Стокса.

~~Теорема (Хукухара-Турриттин)~~
~~Заменой базы вида $z\to z^k$ можно свести любую иррегулярную особенность к особенности экспоненциального типа.~~

Теорема (Хукухара-Турриттин-Левелт)

Пусть дана связность экспоненциального типа. Тогда существует <u>формальное</u> калибровочное преобразование, переводящее $\Phi \rightsquigarrow \oplus\Phi_i$. Структура Стокса — препятствие к существованию <u>сходящегося</u> отождествления. Более того, рассмотрим пучок калибровочных преобразований из $\Phi\to\oplus\Phi_i$ над S^1. Это — торсор над пучком групп верхнетреугольных матриц на $U(\oplus\Phi_i)$, согласованных с фильтрацией, он представляет класс $H^1(S^1, U(\oplus\Phi_i))$.

(5.) Структура Стокса экспоненциального типа $\Longleftrightarrow$ данным Гельфанда–Малгранжа–Вилонена

<u>Идея доказательства</u>: будем таскать фильтрации вдоль S^1, получим набор градуировок, из матриц перехода между ними восстановим t_{ij}.

<u>Бонусные структуры</u> метрика и $\mathbb{Z}$-структура.

~~Метрика~~ $\mathbb{Z}$-структура это просто $\mathbb{Z}$-структура, согласованная с фильтрациями, а вот под метрикой мы понимаем спаривание между антиподальными слоями, причем, если (переносом на полуокружность) превратить его в несимметричное спаривание, то фильтрация Стокса будет полуортогональной.

<u>Почему так?</u>

такое происходит из теории Пикара-Лефшеца

метризованные структуры Стокса $\Longleftrightarrow$ пр-вам с несимметричной бил. формой и полуортогональным разложением + набору автоморфизмов компонент.

<u>Вопрос</u> ?

не уверен в нем до конца вообще говоря.

⑥ Приложения (Санда – Шамото), (Галкин – Голышев – Иритани), (Дубровин)

возьмём вторую структурную связность:

$$z^2\frac{\partial}{\partial z} - c_1(X)\overset{*}{\circ} - z\mu \qquad \text{где } \mu = (p - \dim_{\mathbb{C}} X)/2$$

Гипотеза: Она – экспоненциального типа.

<u>Замечание</u>: заменим $w = \frac{1}{z}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial w} - c_1(X)\overset{*}{\circ} - \frac{1}{w}\mu,$$

сделаем преобразование Фурье, найдём первую структурную связность

$$-\frac{\partial}{\partial s}s - c_1(X)\overset{*}{\circ}\cdot\frac{\partial}{\partial s} - \mu$$

$$\left(c_1(X)* + s\right)\frac{\partial}{\partial s} + (\mu+1)$$

она очевидно регулярна, так что я не понимаю, почему Санда – Шамото называют это утверждение гипотезой. Ссылаются они на нечто (формально) другое. ¯_(")_/¯

$\mathbb{Z}$-структура (Γ-класс):

введём на $H^*(X, \mathbb{C})$ следующую $\mathbb{Z}$-структуру:

образ умножения $H^*(X, \mathbb{C})$ на

$$\Gamma(TX) = \prod_i \Gamma(1+\delta_i) = e^{-\gamma c_1(TX)} + \sum_{k\geq 2}(k-1)!\,\zeta(k)\,ch_k(TX)$$

(Обобщённая) Гамма-гипотеза – эта целочисленная структура согласована со структурой Стокса.

(Обобщённая) Гамма-гипотеза – и соответствует <u>каноническому</u> с точностью до действия группы кос разложению в полуорт. сумму $D^bCoh(X)$.

<u>Цель</u>: доказать в предположении этой гипотезы аналог <u>теоремы Кузнецова</u>.

(7.) Идея доказательства (взята у меня из головы по упражнениям Галкина, скорее всего лажа)

Возьмём вместо $C_0^* \rightsquigarrow C_q^*$. Для первой структ. связности это изомонодромная деформация, для второй, соответственно, изостоксовская.

Подберём q такое, что кривые с нетривиальным пересечением с дивизором раздутия входят с весом ~~q~~ $\varepsilon^{-\text{индекс пересечения}}$.

Тогда собственным прообразам ничего не будет, а остальные войдут с весами $\varepsilon^{\text{положит. степени}}$.

t_{ij} такой связности между оригинальными собственными ~~м~~одир-вами явно стремятся к исходным при $\varepsilon \to 0$, ~~н~~о т.к. деформация изомонодромная они и не менялись.

Важная тонкость: при раздутии мы выходим из класса Фано, поэтому сходимость более ~~нео~~очевидна. Это как-то решается рассмотрением кольца Новикова по q но я не понял, как.