О строении группы старших гомологий ядра Джонсона

Спиридонов Игорь Александрович

Международная лаборатория зеркальной симметрии и автоморфных форм

Пусть S_g — ориентированная компактная поверхность рода g. Напомним, что *группа классов отображений* поверхности S_g — это группа

$$Mod_g = \pi_0(Homeo^+(S_g)),$$

где $Homeo^+(S_g)$ — это группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов S_g на себя. Известно, что Mod_g порождена конечным числом *скручиваний Дена* вдоль простых замкнутых кривых ([4, Теорема 4.11]). Минимальная система порождающих состоит из $2g+1$ элемента и может быть перечислена явно ([4, Теорема 4.14]). Также известно, что Mod_g конечно представима ([4, Теорема 5.7]).

Пусть $\Gamma = \pi_1(S_g)$. Обозначим через $\Gamma = \Gamma_0 \supseteq \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \dots$ нижний центральный ряд группы Γ, определяемый соотношениями $\Gamma_{k+1} = [\Gamma, \Gamma_k]$ и $\Gamma_0 = \Gamma$. Группа классов отображений Mod_g действует внешними автоморфизмами на Γ, причем подгруппы Γ_k инвариантны относительно всех автоморфизмов группы Γ. Напомним, что *фильтрация Джонсона* — это по определению убывающая последовательность вложенных групп

$$Mod_g \supseteq \mathcal{I}_g(1) \supseteq \mathcal{I}_g(2) \supseteq \mathcal{I}_g(3) \supseteq \dots$$
$$\mathcal{I}_g(k) = Ker(Mod_g \to Out(\Gamma/\Gamma_k)).$$

Группа $\mathcal{I}_g = \mathcal{I}_g(1)$ называется *группой Торелли* и состоит в точности из тех классов отображений, которые действуют тривиально на первых гомологиях $H_1(S_g, \mathbb{Z}) = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$. Группа $H_1(\mathcal{I}_g, \mathbb{Z})$ явно вычислена Джонсоном [5]. Группы $\mathcal{I}_g$ и $H_1(\mathcal{I}_g, \mathbb{Z})$ являются конечно порожденными при $g > 2$.

Группа $\mathcal{K}_g = \mathcal{I}_g(2)$ называется *ядром Джонсона*, так как она является ядром *гомоморфизма Джонсона*

$$\tau : \mathcal{I}_g \twoheadrightarrow \mathcal{U}_g = \wedge^3 H_1(S_g, \mathbb{Z})/H_1(S_g, \mathbb{Z}),$$

где $H_1(S_g, \mathbb{Z})$ вложено в $\wedge^3 H_1(S_g, \mathbb{Z})$ с помощью отображения $x \mapsto x \wedge \Omega$, где $\Omega \in \wedge^2 H_1(S_g, \mathbb{Z})$ обозначает образ формы пересечений при каноническом изоморфизме $\wedge^2(H_1(S_g, \mathbb{Z}))^* \cong \wedge^2 H_1(S_g, \mathbb{Z})$. Также, $\mathcal{K}_g$ может быть охарактеризована как подгруппа в Mod_g, порожденная скручиваниями Дена вдоль сепарирующих кривых [3]. Конечная порожденность групп $\mathcal{K}_g$ и $H_1(\mathcal{K}_g, \mathbb{Z})$ является открытым вопросом. Группы $\mathcal{I}_2$ и $\mathcal{K}_2$ равны и представляют собой свободную группу, порождающими которой являются скручивания Дена вдоль всех изотопических классов сепарирующих простых замкнутых кривых на S_g [6].

Когомологическая размерность групп $\mathcal{I}_g$ и $\mathcal{K}_g$ была вычислена Бествиной, Буксом и Маргалитом [1] с помощью спектральной последовательности Картана-Лере для действия этих групп на специальном стягиваемом клеточном комплексе $\mathcal{B}_g$, названном ими *комплексом циклов*.

Теорема 1 *[1]*
Пусть $g \geq 2$. Тогда $cd(\mathcal{I}_g) = 3g - 5$.

Теорема 2 *[1]*
Пусть $g \geq 2$. Тогда $cd(\mathcal{K}_g) = 2g - 3$.

Про группу $H_{3g-5}(\mathcal{I}_g,\mathbb{Z})$ известно очень немного. В [1] получен следующий результат.

Теорема 3 *[1]*
Пусть $g \geq 2$. Тогда группа $H_{3g-5}(\mathcal{I}_g,\mathbb{Z})$ бесконечно порождена.

Далее, мы сосредоточимся на рассмотрении группы $\mathcal{K}_g$.

Задача 4 *Вычислить группу $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g,\mathbb{Z})$.*

Напомним, что $\mathcal{U}_g = \mathcal{I}_g/\mathcal{K}_g$. Следовательно, $\mathcal{I}_g$ действует на $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g,\mathbb{Z})$, причем $\mathcal{K}_g$ содержится в ядре этого действия. Следовательно, $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g,\mathbb{Z})$ является $\mathbb{Z}[\mathcal{U}_g]$-модулем. Теперь мы можем сформулировать результат Гайфуллина [2], аналогичный Теореме 3.

Теорема 5 *[2]*
Пусть $g \geq 3$. Тогда группа $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g,\mathbb{Z})$ содержит бесконечно порожденную свободную абелеву группу. Более того, $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g,\mathbb{Z})$ является бесконечно порожденным $\mathbb{Z}[\mathcal{U}_g]$-модулем.

Для того, чтобы описать идею доказательства Теоремы 5, нам понадобится следующее определение.

Определение 6 *Пусть $h_1,\ldots,h_n$ — набор попарно коммутирующих элементов группы G. Рассмотрим гомоморфизм $\phi:\mathbb{Z}^n \to G$, при котором порождающий элемент i-ой группы $\mathbb{Z}$ переходит в h_i. Положим $\mathcal{A}(h_1,\ldots,h_n) = \phi_*(\mu_n)$, где через μ_n обозначен стандартный порождающий элемент группы $H_n(\mathbb{Z}^n)$. Гомологический класс $\mathcal{A}(h_1,\ldots,h_n) \in H_n(G)$ называется абелевым циклом.*

Теперь мы можем более подробно описать результат, полученный в [2]. Пусть $\gamma_1,\ldots,\gamma_{2g-3}$ — набор попарно негомотопных и непересекающихся сепарирующих ориентированных простых замкнутых кривых на S_g. Тогда соответствующие скручивания Дена $T_{\gamma_1},\ldots,T_{\gamma_{2g-3}} \in \mathcal{K}_g$ коммутируют между собой. Будем говорить, что абелев цикл $\mathcal{A}(T_{\gamma_1},\ldots,T_{\gamma_{2g-3}})$ *ассоциирован* с набором кривых $\gamma_1,\ldots,\gamma_{2g-3}$. В [2] доказано, что существует бесконечный набор абелевых циклов, ассоциированных с некоторыми наборами кривых, порождающий свободный $\mathbb{Z}[\mathcal{U}_g]$-модуль (в частности, свободный $\mathbb{Z}$-модуль) в $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g)$.

Таким образом, при изучении группы $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g,\mathbb{Z})$ возникает следующая задача.

Задача 7 *Вычислить подгруппу в $H_{2g-3}(\mathcal{K}_g,\mathbb{Z})$, порожденную абелевыми циклами, ассоциированными с некоторыми наборами непересекающихся сепарирующих ориентированных простых замкнутых кривых на S_g.*

В настоящее время автор работает над решением Задач 7 и 4.

Список литературы

[1] M.Bestvina, K.-U.Bux, D.Margalit. The dimension of the Torelli group, J. Amer. Math. Soc. 23:1 (2010), 61–105, arXiv:0709.0287.

[2] Alexander A. Gaifullin. On the top homology group of Johnson kernel, arXiv:1903.03864.

[3] D. Johnson. The structure of the Torelli group II: A characterization of the group generated by twists on bounding curves, Topology 24:2 (1985), 113–126.

[4] B. Farb, D. Margalit. A Primer on Mapping Class Groups. Princeton University Press, 2012.

[5] D. Johnson, The structure of the Torelli group III: The Abelianization of I, Topology 24:2 (1985), 127–144.

[6] G.Mess, The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces, Topology 31:4 (1992), 775–790.